

А. В. Скороход

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Т. Г. ШЕВЧЕНКО

А. В. СКОРОХОД

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(стохастические дифференциальные уравнения
и предельные теоремы для процессов
Маркова)

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

Данная работа посвящена изучению решений стохастических дифференциальных уравнений, а также использованию метода стохастических дифференциальных уравнений для изучения свойств процессов Маркова и для исследования сходимости последовательности цепей Маркова к непрерывному процессу. В книге освещены вопросы стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений, что позволяет изучить вопрос об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам Маркова; стохастические интегралы могут быть использованы и для уточнения предельных теорем для последовательности сумм независимых случайных величин.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов, научных работников, работающих в области теории вероятностей или тех разделов физики и техники, в которых используются вероятностные методы.

Ответственный редактор
доктор физ.-мат. наук проф. И. И. ГИХМАН

Анатолий Владимирович Скороход.
Исследования по теории случайных процессов

Редактор *Миронец Е. В.*
Технический редактор *Хохановская Т. И.*

Художник *Подгорный А. М.*
Корректор *Сокирко Л. П.*

БФ 16055. Зак. № 676. Тираж 5000. Формат бумаги 60×92¹/₁₆. Физ. печ. лист. 13,5. Услов. печ. лист. 13,5. Учетно-издат. листов 11,6. Бум. листов 6,75. Подписано к печати 25/XII 1961 г. Цена 42 коп.

Напечатано с матриц Львовской книжной типографии, Львов, ул. Пекарская, 11, в типографии издательства КГУ, Киев, Б. Шевченко, 14.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При всем разнообразии методов, применяемых в теории вероятностей, их можно разделить на две довольно обособленные группы: аналитические методы и вероятностные. Основное различие между этими методами заключается в том, что первые имеют дело лишь с распределениями случайных величин и используют для изучения этих распределений различных аналитический аппарат (производящие функции, характеристические функции, дифференциальные уравнения, теорию однопараметрических полугрупп и др.), а вероятностные методы основаны на оперировании с самими случайными величинами. Так, для доказательства того факта, что последовательность функций распределения $F_n(x)$ сходится к некоторой функции распределения $F(x)$, при использовании аналитических методов поступают часто следующим образом: устанавливают, что $F_n(x)$ удовлетворяет некоторому уравнению $L_n F_n(x) = 0$ и что оператор L_n при $n \rightarrow \infty$ в определенном смысле сходится к оператору L такому, что F удовлетворяет соотношению $LF = 0$ (так например доказывается центральная предельная теорема в книге А. Я. Хинчина «Асимптотические законы теории вероятностей»). К такому же результату мы бы пришли, если бы построили последовательность величин ξ_n , сходящихся по вероятности к величине ξ , причем функция распределения ξ_n была бы $F_n(x)$, а величины ξ — $F(x)$. Такой ход доказательства факта носил бы вероятностный характер.

Предпочтительность той или иной группы методов — вопрос, который имеет смысл лишь по отношению к конкретной задаче, хотя в пользу аналитического метода говорит его общность, а в пользу вероятностных методов — их единство с содержанием. Надо отметить, что в подавляющем большинстве работ по теории вероятностей используются в основном аналитические методы. Однако увеличение числа работ по применению вероятностных методов для решения чисто аналитических задач, а также по использованию метода Монте-Карло для приближен-

ных вычислений оправдывает в некоторой степени (если это нуждается в оправдании) развитие чисто вероятностных методов.

Изложению некоторых вероятностных методов на конкретном материале стохастических дифференциальных уравнений и предельных теорем для процессов Маркова и посвящена эта книга.

Содержание книги распадается на три части. В первой (главы 1, 2) приводятся основные сведения по теории случайных процессов и строится вспомогательный аппарат стохастических интегралов. Сведения по теории случайных процессов приведены без доказательства, поскольку книга рассчитана на читателя, владеющего основами теории случайных процессов; ссылки на источники, содержащие доказательства, имеются в примечаниях, помещенных в конце книги. Особую роль играют факты по теории мартингалов. Для подробного ознакомления с этой теорией можно воспользоваться соответствующей главой из книги Дуба «Вероятностные процессы». Теория стохастических интегралов в необходимой для нас общности не вошла ещё в какую-либо книгу по теории случайных процессов, поэтому здесь все доказательства приведены полностью.

Вторая часть книги (главы 3, 4, 5) содержит теорию стохастических дифференциальных уравнений, которая позволяет построить на основании простейших процессов широкий класс процессов Маркова. Это, пожалуй, крупнейший раздел теории вероятностей, где господствуют вероятностные методы.

Последняя часть (главы 6, 7) посвящена различным предельным теоремам, связанным со сходимостью последовательности цепей Маркова к марковскому процессу с непрерывным временем. При доказательстве этих предельных теорем всюду используется указанный выше вероятностный прием доказательства того, что последовательность функций распределения $F_n(x)$ сходится к $F(x)$. Кроме того, в этой части рассмотрен вероятностный метод оценки скорости сходимости в предельных теоремах и уточнения предельных теорем. Результаты, полученные в этом направлении, не могут претендовать даже на относительную окончательность, что может быть оправдано тем, что они являются первыми результатами в этой области, полученными вероятностными методами.

Литературные ссылки и список литературы, помещённые в конце книги, не претендуют на полноту.

Я очень благодарен профессору Иосифу Ильичу Гихману, беседы с которым оказали мне существенную помощь для выяснения многих затронутых в книге вопросов.

АВТОР.

Глава 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Основные определения, связанные с понятием случайного процесса

Будем говорить, что задано поле вероятностей $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, если во множестве Ω выделена σ -алгебра подмножеств множества Ω — \mathcal{F} , а на σ -алгебре \mathcal{F} определена мера \mathbf{P} такая, что $\mathbf{P}\{\Omega\} = 1$. Элементы ω множества Ω будем называть элементарными событиями, элементы A, B, \dots σ -алгебры \mathcal{F} будем называть случайными событиями.

Пусть X метрическое пространство. Если функция $\xi(\omega)$ определена почти для всех, относительно меры \mathbf{P} , точек, ω принимает значения из X , причём для всякого борелевского множества A из X множество $\{\xi(\omega) \in A\}$ тех ω , для которых $\xi(\omega) \in A$, принадлежит \mathcal{F} , то $\xi(\omega)$ называется случайной величиной со значениями из X или случайной величиной в X . Если X m -мерное евклидово пространство $R^{(m)}$, то величина $\xi(\omega)$ называется ещё m -мерным случайным вектором. В том случае, если $\xi(\omega)$ случайная величина из $R^{(m)}$ и существует

$$\int |\xi(\omega)| \mathbf{P}(d\omega),$$

то вектор $\int \xi(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$ называется математическим ожиданием вектора $\xi(\omega)$ и обозначается $\mathbf{M} \xi(\omega)$.

Последовательность случайных величин $\xi_n(\omega)$ со значениями из X сходится к случайной величине $\xi_0(\omega)$

а) почти наверное (с вероятностью 1), если $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi_0(\omega)$ почти для всех ω по мере \mathbf{P} ,

б) по вероятности, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \rho(\xi_n(\omega), \xi_0(\omega)) > \varepsilon \} = 0,$$

$\rho(x, y)$ — расстояние в X между x и y .

Функция $\xi(t, \omega)$, определённая при $t \in [t_0, T]$ и при каждом

$t \in [t_0, T]$ почти для всех ω относительно меры P называется случайным процессом, определенным на $[t_0, T]$ со значениями из X , если при каждом $t \in [t_0, T]$ $\xi(t, \omega)$ является случайной величиной в X . Процесс $\xi(t, \omega)$ называется стохастически непрерывным в точке t_1 , если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} P \{ \rho(\xi(t), \xi(t_1)) > \varepsilon \} = 0;$$

процесс называется стохастически непрерывным справа в точке t_1 , если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ t > t_1}} P \{ \rho(\xi(t), \xi(t_1)) > \varepsilon \} = 0.$$

Аналогично определяется стохастическая непрерывность слева.

Процесс стохастически непрерывный (справа, слева), если он стохастически непрерывен в каждой точке определения.

Пусть B_1 σ -алгебра борелевских множеств отрезка $[t_0, T]$, $[t_0, T] \times \Omega$ — множество пар (t, ω) , когда $t \in [t_0, T]$, $\omega \in \Omega$, $B_1 \times F$ минимальная σ -алгебра подмножеств $[t_0, T] \times \Omega$, содержащая все подмножества вида $\Delta \times A$. $\Delta \times A$ — множество пар точек (t, ω) , для которых $t \in \Delta$, $\omega \in A$, а $\Delta \in B_1$, $A \in F$. Если функция $\xi(t, \omega)$ измерима относительно σ -алгебры $B_1 \times F$, то процесс $\xi(t, \omega)$ называется измеримым.

Рассмотрим процесс $\xi(t, \omega)$ в $R^{(m)}$. Пусть Λ некоторое всюду плотное на $[t_0, T]$ множество. Процесс $\xi(t, \omega)$ называется Λ -сепарабельным (сепарабельным относительно множества Λ), если существует такое событие A_1 , имеющее вероятность 0 ($P\{A_1\} = 0$), что для всякого замкнутого множества F из $R^{(m)}$ и интервала (открытого) Δ событие

$$\{\xi(t, \omega) \in F \text{ для всех } t \in \Lambda \cap \Delta\}$$

влечёт событие

$$A_1 \cup \{\xi(t, \omega) \in F \text{ для всех } t \in \Delta\}.$$

Если процесс $\xi(t, \omega)$ сепарабелен относительно некоторого множества, то мы его будем называть сепарабельным.

Вероятности

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k) = P \{ \xi(t_1) \in A_1, \xi(t_2) \in A_2, \dots, \xi(t_k) \in A_k \},$$

где $t_1, t_2, \dots, t_k \in [t_0, T]$, A_1, A_2, \dots, A_k — борелевские множества пространства, в котором определен процесс, называются k -мерными распределениями процесса $\xi(t, \omega)$. Совокупность k -мерных распределений при всевозможных значениях k называется конечномерными распределениями процесса $\xi(t, \omega)$.

Два процесса $\xi_1(t, \omega)$ и $\xi_2(t, \omega)$, определённых на $[t_0, T]$, называются стохастически эквивалентными, если для всякого

$$t \in [t_0, T], P \{ \xi_1(t, \omega) = \xi_2(t, \omega) \} = 1.$$

Стохастически эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения.

Теорема 1. Для всякого процесса $\xi(t, \omega)$ в X , существует стохастически эквивалентный ему сепарабельный процесс. Если процесс $\xi(t, \omega)$ определён на $[t_0, T]$ и стохастически непрерывен во всех точках $t \in [t_0, T]$, за исключением быть может конечного числа точек, то существует сепарабельный измеримый процесс стохастически эквивалентный процессу $\xi(t, \omega)$.

Процесс $\xi(t, \omega)$, определённый на $[t_0, T]$, называется непрерывным с вероятностью 1, если почти для всех $\omega \in \Omega$ $\xi(t, \omega)$, как функция t , определена и непрерывна на $[t_0, T]$.

Теорема 2 (Колмогорова). Пусть $\xi(t, \omega)$ сепарабельный процесс, определённый на $[t_0, T]$ и принимающий значения из $R^{(m)}$. Если существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$, что при $t_1, t_2 \in [t_0, T]$

$$M |\xi(t_2) - \xi(t_1)|^\alpha \leq C |t_2 - t_1|^{1+\beta},$$

то процесс $\xi(t, \omega)$ будет непрерывен с вероятностью 1.

Рассмотрим процесс $\xi(t, \omega)$ определённый на $[t_0, T]$, со значениями из $R^{(m)}$. Обозначим через $\Phi^{(m)}[t_0, T]$ пространство всех функций $x(t)$, определённых на $[t_0, T]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$. Пусть $C_{t_1}(A)$, $(t_1 \in [t_0, T])$, A — борелевское множество из $R^{(m)}$, множество тех $x(t)$, для которых $x(t_1) \in A$. Множество, являющееся пересечением конечного числа множеств вида $C_{t_1}(A)$, будем называть цилиндрическим множеством. Обозначим через $F^{(m)}[t_0, T]$ минимальную σ -алгебру подмножеств $\Phi^{(m)}$, $[t_0, T]$, содержащую все цилиндрические множества. Мера $\mu(A)$, определяемая однозначно на $F^{(m)}[t_0, T]$ соотношениями $\mu(C_{t_1}(A_1) \cap C_{t_2}(A_2) \cap \dots \cap C_{t_k}(A_k)) = P \{ \xi(t_i, \omega) \in A_i, i = 1, 2, \dots, k \}$

для всех k, t_1, t_2, \dots, t_k из $[t_0, T]$ и борелевских множеств A_1, A_2, \dots, A_k из $R^{(m)}$, будет называться мерой в пространстве функций, соответствующей процессу $\xi(t, \omega)$, или просто мерой, соответствующей процессу $\xi(t, \omega)$. Пусть каждому набору t_1, t_2, \dots, t_k из $[t_0, T]$ при всех натуральных k соответствует k -мерное распределение

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k),$$

причём для всех $j \leq k$ и борелевских множеств $A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_k$ из $R^{(m)}$ выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} P_{t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, R^{(m)}, A_{j+1}, \dots, A_k) = \\ = P_{t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_k), \end{aligned}$$

$$P_{t_1, \dots, t_j, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_j, \dots, A_k) = P_{t_1, \dots, t_k, \dots, t_j}(A_1, \dots, A_k, \dots, A_j).$$

Такую совокупность распределений мы будем называть согласованной.

Теорема 3 (Колмогорова). Если $P_{t_1, t_2, \dots, t_k} (A_1, A_2, \dots, A_k)$ совокупность согласованных распределений, то существует случайный процесс $\xi(t, \omega)$, для которого эти распределения будут конечномерными. Каждой согласованной совокупности распределений соответствует единственная мера на $F^{(m)}[t_0, T]$.

Пусть $\xi(t, \omega)$ случайный процесс, определённый на $[t_0, T]$ и $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$. Рассмотрим минимальную σ -алгебру событий, содержащую все события вида $\{\xi(s, \omega) \in A\}$ при $s \in [t_1, t_2]$ и произвольном борелевском множестве A из пространства значений процесса. Эту σ -алгебру мы будем в дальнейшем обозначать через $F([t_1, t_2], \xi(t, \omega))$.

§ 2. Условные вероятности и математические ожидания

Пусть задано поле вероятностей $\{\Omega, F, P\}$ и F_1 σ -алгебра событий из F , $F_1 \subset F$. Если $\xi(\omega)$ некоторая случайная величина в $R^{(m)}$, то случайная величина $M(\xi(\omega)/F_1)$, измеримая относительно F_1 и удовлетворяющая соотношению

$$\int_A M(\xi(\omega)/F_1) P(d\omega) = \int_A \xi(\omega) P(d\omega) \quad (2.1)$$

для всех $A \in F_1$, для которых

$$\int_A |\xi(\omega)| P(d\omega) < \infty,$$

называется условным математическим ожиданием величины $\xi(\omega)$ относительно σ -алгебры F_1 . Если $M|\xi(\omega)| < \infty$, то условное математическое ожидание существует и определяется однозначно с точностью до ω — множеств меры нуль. В том случае, когда F_1 является минимальной σ -алгеброй, содержащей все события вида

$$\{\xi_1(\omega) \in A_1\}, \{\xi_2(\omega) \in A_2\}, \dots, \{\xi_n(\omega) \in A_n\},$$

где $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ некоторые случайные величины, а A_1, A_2, \dots, A_n борелевские множества из пространства их значений, мы вместо $M(\xi(\omega)/F_1)$ напомним $M(\xi(\omega)/\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$. Эта величина будет называться условным математическим ожиданием величины $\xi(\omega)$ при фиксированных $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$.

Если σ -алгебра F_1 совпадает с σ -алгеброй $F([t_1, t_2], \xi(t, \omega))$, где $\xi(t, \omega)$ некоторый случайный процесс, то вместо $M(\xi(\omega)/F_1)$ иногда будет писаться $M(\xi(\omega)/\xi(t, \omega), t \in [t_1, t_2])$. Эта величина будет называться условным математическим ожиданием величины $\xi(\omega)$ при фиксированном на $[t_1, t_2]$ значении $\xi(t, \omega)$.

Обозначим через $\chi_A(x)$ характеристическую функцию борелевского множества A из $R^{(m)}$. Тогда величина

$$P\{\xi(\omega) \in A/F_1\} = M(\chi_A(\xi(\omega))/F_1)$$

носит название условной вероятности события $\{\xi(\omega) \in A\}$ относительно F_1 . По аналогии с условными математическими ожиданиями определяются $P\{\xi(\omega) \in A/\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)\}$ и $P\{\xi(\omega) \in A/\xi(t, \omega), t \in [t_1, t_2]\}$.

Совокупность условных вероятностей $P\{\xi(\omega) \in A/F_1\}$ при всевозможных борелевских множествах A называется условным распределением величины $\xi(\omega)$ относительно F_1 .

Отметим, что из (2.1) вытекает соотношение

$$\int_A P\{\xi(\omega) \in A/F_1\} P(d\omega) = P\{(\xi(\omega) \in A) \cap A\}, \quad (2.2)$$

для всех A из F_1 .

Из формулы (2.2) легко выводится.

Лемма. Если для последовательности $\xi_n(\omega)$ величин из $R^{(m)}$ при некотором F_1

$$M(|\xi_n(\omega)|/F_1) \rightarrow 0$$

по вероятности, то и $\xi_n(\omega) \rightarrow 0$ по вероятности.

§ 3. Процессы с независимыми приращениями

Процесс $\xi(t)$, определенный на $[t_0, T]$ и принимающий значения из $R^{(m)}$, называется процессом с независимыми приращениями, если какие бы не были точки $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ из $[t_0, T]$, величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, \dots , $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ независимы между собой, т. е. для всех борелевских множеств A_0, A_1, \dots, A_k из $R^{(m)}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_0) \in A_0, \xi(t_1) - \xi(t_0) \in A_1, \dots, \xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) \in A_k\} = \\ = P\{\xi(t_0) \in A_0\} \prod_{i=1}^k P\{\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in A_i\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что конечномерные распределения процесса $\xi(t)$, а следовательно и мера, соответствующая процессу $\xi(t)$, полностью определяются в этом случае распределением величины $\xi(t_0)$ и распределениями $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ при всевозможных значениях t_1 и t_2 из $[t_0, T]$. Распределение величины $\xi(t_0)$ может быть произвольным. Для стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями (а в дальнейшем будут рассматриваться только такие процессы с независимыми приращениями)

распределение величины $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ при $t_1 < t_2$ определяется своей характеристической функцией:

$$\begin{aligned} M \exp \{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\} = \exp \left\{ i(a(t_2) - a(t_1), z) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} ([A(t_2) - A(t_1)] z, z) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{|u|>1} (e^{i(z, u)} - 1) G(dt \times du) + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{|u|<1} [e^{i(z, u)} - 1 - i(z, u)] G(dt \times du) \right\}, \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $a(t)$ — непрерывная на $[t_0, T]$ функция со значениями из $R^{(m)}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, T]$ функция, значениями которой служат неотрицательные линейные симметричные операторы в $R^{(m)}$, причём $A(t_2) - A(t_1)$ является также неотрицательным оператором, если $t_1 < t_2$, наконец, G — мера, определённая на борелевских множествах пространства $[t_0, T] \times R^{(m)}$ (пространства пар точек $(t; u)$, $t \in [t_0, T]$, $u \in R^{(m)}$), такая, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^T \int_{|u|>\varepsilon} \frac{(u, u)}{1 + (u, u)} G(dt \times du) < \infty,$$

(через (x, y) обозначается здесь скалярное произведение векторов x и y из $R^{(m)}$).

Процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$, определённый при $t \geq 0$ и удовлетворяющий условию $\xi(0) = 0$, будет называться однородным процессом с независимыми приращениями, если распределение величины $\xi(t+h) - \xi(t)$ зависит только от h . Конечномерные распределения такого процесса полностью определяются распределениями величин $\xi(t)$ при всевозможных $t > 0$. Для стохастически непрерывных однородных процессов с независимыми приращениями имеет место следующее представление логарифма характеристической функции:

$$\begin{aligned} \log M e^{i(z, \xi(t))} = t [i(z, \gamma) - \frac{1}{2} (Az, z) + \\ + \int_{|u|<1} (e^{i(z, u)} - 1 - i(z, u)) M(du) + \int_{|u|>1} (e^{i(z, u)} - 1) M(du)], \quad (3.2) \end{aligned}$$

где $\gamma \in R^{(m)}$, A — линейный симметричный неотрицательный оператор в $R^{(m)}$. M — мера, определённая на борелевских множествах пространства $R^{(m)}$ такая, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u|>\varepsilon} \frac{(u, u)}{1 + (u, u)} M(du) < \infty.$$

Процессы, у которых мера G (у однородных M) тождественно равна нулю, называются нормальными процессами. Если процесс с независимыми приращениями с вероятностью единица непрерывен, то он обязательно нормален; обратное верно для стохастически непрерывных сепарабельных процессов. Одномерный (т. е. с числовыми значениями) нормальный процесс с независимыми приращениями $w(t)$, для которого

$$\log M e^{i\lambda(w(t+h)-w(t))} = -\frac{\lambda^2 h}{2}$$

называется процессом броуновского движения. Этот процесс будет непрерывно встречаться нам в дальнейшем.

Одномерный однородный процесс с независимыми приращениями $v(t)$, принимающий неотрицательные целочисленные значения, называется процессом Пуассона, если при некотором $a > 0$

$$P\{v(t) = k\} = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}.$$

§ 4. Марковские процессы

Процесс $\xi(t)$, определённый на $[t_0, T]$ и принимающий значения из $R^{(m)}$, называется марковским процессом, если для всех $s < t$ из $[t_0, T]$ с вероятностью 1 выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \in A/F([t_0, s], \xi(\tau))\} = \\ = P\{\xi(t) \in A/\xi(s)\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (4.1) вытекает, что для всех $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ и всякого борелевского множества A с вероятностью 1 выполняется соотношение:

$$P\{\xi(t_k) \in A/\xi(t_1), \dots, \xi(t_{k-1})\} = P\{\xi(t_k) \in A/\xi(t_{k-1})\}. \quad (4.2)$$

Если существует такая функция $P(t_1, x, t_2, A)$, определённая при всех $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $x \in R^{(m)}$ и борелевских множеств A из $R^{(m)}$, измеримая по x и являющаяся мерой по A , такая, что с вероятностью единица

$$P\{\xi(t_2) \in A/\xi(t_1)\} = P(t_1, \xi(t_1), t_2, A),$$

то такая функция называется переходной вероятностной функцией марковского процесса $\xi(t)$. Если марковский процесс $\xi(t)$ имеет переходную вероятностную функцию $P(t_1, x, t_2, A)$, то конечномерные распределения процесса $\xi(t)$ для $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ определяются по формуле:

$$P\{\xi(t_1) \in A_1, \xi(t_2) \in A_2, \dots, \xi(t_k) \in A_k\} =$$

$$= \int_{A_1} m_0(dx_0) \int P(t_0 x_0, t_1, dx_1) \dots \int P t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, A_k), \quad (4.3)$$

где $m_0(A)$ — распределение величины $\xi(t_0)$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ образует цепь Маркова, если для всякого $k \leq n$ и всякого борелевского множества A из области значений ξ_k с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$P\{\xi_k \in A / \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}\} = P\{\xi_k \in A / \xi_{k-1}\}.$$

Если существуют такие функции $P_k(x, A)$, измеримые по x и являющиеся мерами по A , что с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$P\{\xi_k \in A_k / \xi_{k-1}\} = P_k(\xi_{k-1}, A),$$

то эти функции называются переходными вероятностями цепи Маркова $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

§ 5. Мартингалы

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ случайных величин в $R^{(m)}$ называется мартингалом, если для всякого n $M|\xi_n| < \infty$ и с вероятностью 1

$$M(\xi_n / \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \xi_{n-1}.$$

Отметим некоторые важные свойства последовательностей мартингалов:

1) для всякого $C > 0$

$$P\left\{\sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| > C\right\} \leq \frac{1}{C} M|\xi_n|;$$

2) если при некотором $\alpha > 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$ $M|\xi_k|^\alpha < \infty$, то

$$M \sup_k |\xi_k|^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha M|\xi_n|^\alpha.$$

Процесс $\xi(t)$, определённый на $[t_0, T]$ и принимающий значения из $R^{(m)}$, называется мартингалом, если для всех t $M|\xi(t)| < \infty$ и при $s < t$ с вероятностью 1

$$M(\xi(t) / \xi(u), u \in [t_0, s]) = \xi(s).$$

Мартингалы — процессы и последовательности — будут часто использоваться в следующих главах; при этом нам будут нужны следующие свойства процессов — мартингалов:

Пусть $\xi(t)$ сепарабельный мартингал, определённый на $[t_0, T]$, тогда

3) $\xi(t)$ как функция t с вероятностью 1 не будет иметь разрывов второго рода;

4) для всякого $C > 0$ имеет место неравенство

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi(t)| > C \right\} \leq \frac{1}{C} M |\xi(T)|;$$

5) если при некотором $\alpha > 0$ $M |\xi(t)|^\alpha < \infty$ для всех $t \in [t_0, T]$, то

$$M \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi(t)|^\alpha \right) \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^\alpha M |\xi(T)|^\alpha;$$

6) если $\xi(t)$ мартингал с числовыми значениями и $\xi^2(t) - t$ является также мартингалом, то $\xi(t)$ — процесс броуновского движения;

7) если $\xi(t)$ с вероятностью 1 — непрерывный мартингал, а $\tau(s)$, $s \in [\alpha, \beta]$ с вероятностью 1 — неубывающий процесс, для которого событие $\{\tau(s) > t\}$ при каждом $s \in [\alpha, \beta]$ входит в $F([t_0, t], \xi(u))$, тогда процесс $\xi(\tau(s))$ будет также мартингалом.

Заметим ещё, что приведенное выше определение мартингала (процесса) эквивалентно следующему: процесс $\xi(t)$, определённый при $t \in [t_0, T]$, со значениями из $R^{(m)}$ называется мартингалом, если для каждого $t \in [t_0, T]$ существует σ -алгебра F_t , относительно которой измеримы все величины $\xi(s)$ при $s \leq t$, такая, что при $t_1 < t_2$

$$M(\xi(t_2) / F_{t_1}) = \xi(t_1).$$

§ 6. Одна предельная теорема для случайных процессов

В данной работе часто придётся иметь дело с последовательностями процессов, конечномерные распределения которых будут сходиться к некоторым предельным распределениям. Оказывается, что при довольно широких предположениях можно считать сами рассматриваемые процессы сходящимися к некоторому предельному процессу по вероятности. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, определённых при $t \in [t_0, T]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$, стохастически непрерывных справа в каждой точке $t \in [t_0, T]$, такова, что для всех k и t_1, t_2, \dots, t_k из $[t_0, T]$ совместное распределение величин $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \dots, \xi_n(t_k)$ слабо сходится к некоторому предельному распределению, и для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|s_1 - s_2| < h} P \{ |\xi_n(s_1) - \xi_n(s_2)| > \varepsilon \} = 0. \quad (6.1)$$

Тогда можно построить последовательность случайных процессов $x_n(t, \omega')$, $n = 0, 1, 2, \dots$ на поле вероятностей (Ω', F', P') , где Ω' отрезок $[0, 1]$, F' σ -алгебра борелевских множеств отрезка $[0, 1]$, P' — лебегова мера на $[0, 1]$, таким образом, что эти про-

цессы $x_n(t, \omega')$ будут обладать следующими свойствами: $x_0(t, \omega')$ будет стохастически непрерывным, $x_n(t, \omega')$ будет при всех t сходиться по вероятности к $x_0(t, \omega')$, и при $n > 0$ конечномерные распределения процессов $x_n(t, \omega')$ и $\xi_n(t)$ будут совпадать.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется лемма.

Лемма. Пусть R некоторое полное метрическое сепарабельное пространство, $\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x и y из R , \mathbf{B} — σ -алгебра борелевских множеств пространства R . Если последовательность мер $\mu_n(A)$, заданных на \mathbf{B} и удовлетворяющих условию $\mu_n(R) = 1$, слабо сходится к мере μ_0 , также определённой на \mathbf{B} , то на поле вероятностей $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ можно построить такую последовательность случайных величин $x_n(\omega')$, для которой $x_n(\omega') \rightarrow x_0(\omega')$ по вероятности и для всякого A из \mathbf{B}

$$\mathbf{P}\{x_n(\omega) \in A\} = \mu_n(A).$$

Доказательство. Определим борелевские множества S_{i_1, i_2, \dots, i_k} для всех натуральных k, i_1, i_2, \dots, i_k так, чтобы выполнялись условия:

- 1) S_{i_1, i_2, \dots, i_k} и $S_{i'_1, i'_2, \dots, i'_k}$ не имеют общих точек при $i_k \neq i'_k$;
- 2)

$$\bigcup_{i_k=1}^{\infty} S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} = S_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = R;$$

- 3) диаметр S_{i_1, i_2, \dots, i_k} не превосходит $(1/2)^k$;
- 4) для всех i_1, i_2, \dots, i_k

$$\mu_0(\overline{S_{i_1, i_2, \dots, i_k} \cap (R \setminus S_{i_1, i_2, \dots, i_k})}) = 0.$$

Определим далее интервалы отрезка $[0, 1]$: $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и натуральных k, i_1, i_2, \dots, i_k так, чтобы выполнялись условия:

- 1) интервалы $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ и $\Delta_{i'_1, i'_2, \dots, i'_k}^{(n)}$ не пересекаются при $i_k \neq i'_k$;
- 2) интервал $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ находится левее интервала $\Delta_{i'_1, i'_2, \dots, i'_k}^{(n)}$, если существует такое r , что $i_j = i'_j$ при $j < r$, а $i_r < i'_r$;

3) длина интервала $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ равна $\mu_n(S_{i_1, i_2, \dots, i_k})$. Выберем в каждом из множеств S_{i_1, i_2, \dots, i_n} по одной точке $\bar{x}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ и положим

$$x_n^m(\omega') = \bar{x}_{i_1, i_2, \dots, i_m} \quad \text{при } \omega' \in \Delta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(n)}.$$

Тогда для всех ω' , за исключением счетного множества концов интервалов $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(n)}$, выполняется соотношение:

$$\rho(x_n^m(\omega'), x_n^{m+p}(\omega')) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Так как R полное пространство, то почти для всех ω' существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} x_n^m(\omega')$. Обозначим этот предел через $x_n(\omega')$. Поскольку длина интервала $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(n)}$ стремится к длине интервала $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(0)}$ при $n \rightarrow \infty$, то при $\omega' \in \Delta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(0)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n^m(\omega'), x_0^m(\omega')) = 0$$

и значит каково бы ни было m

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n(\omega'), x_0(\omega')) \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Таким образом, $x_n(\omega') \rightarrow x_0(\omega')$ с вероятностью 1 и тем более по вероятности. Остается показать, что

$$P\{x_n(\omega') \in A\} = \mu_n(A).$$

Для этого достаточно установить указанное соотношение для тех A , для которых $\mu_n(\bar{A} \cap R \setminus \bar{A}) = 0$ (\bar{A} обозначает замыкание множества A).

Пусть C_m обозначает множество точек, для которых расстояние от $\bar{A} \cap R \setminus \bar{A}$ не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^m$. Тогда, обозначая через A_m сумму всех множеств S_{i_1, i_2, \dots, i_m} , целиком входящих в $A \setminus C_{m+1}$, будем иметь $A \supset A_m \supset A \setminus C_m$,

$$\begin{aligned} P\{x_n(\omega') \in A\} &\geq P\{x_n^{(m+1)}(\omega') \in A_m\} = \mu_n(A_m) \geq \\ &\geq \mu_n(A) - \mu_n(C_m). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_n(C_m) = 0$, то $P\{x_n(\omega') \in A\} \geq \mu_n(A)$.

Аналогично

$$P\{x_n(\omega') \in R \setminus A\} \geq \mu_n(R \setminus A).$$

Но

$$\begin{aligned} &(P\{x_n(\omega') \in A\} - \mu_n(A)) + \\ &+ P\{x_n(\omega') \in R \setminus A\} - \mu_n(R \setminus A) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(P\{x_n(\omega') \in A\} = \mu_n(A).$$

Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Выберем всюду плотную на $[t_0, T]$ последовательность точек t_1, t_2, \dots , включающую

точку T . Пусть R метрическое пространство последовательностей $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, где $x_k \in R^{(m)}$, с метрикой

$$\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (1 - e^{-|x_k - y_k|}),$$

если $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots\}$.

Пусть μ_n мера на борелевских множествах R такая, что какие бы ни были борелевские множества A_1, A_2, \dots, A_k из $R^{(m)}$, а множество $C \subset R$, содержит те и только те точки $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, для которых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k$, выполняется соотношение

$$\mu_n(C) = P\{\xi_n(t_1) \in A_1, \dots, \xi_n(t_k) \in A_k\},$$

а

$$\mu_0(C) = F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k),$$

где $F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ — предельное распределение, к которому сходится совместное распределение величин $\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k)$. Легко убедиться, что меры μ_n удовлетворяют условиям леммы. Поэтому можно построить на поле вероятностей $\{\Omega', F', P'\}$ последовательность величин $x_n(\omega') = \{x_1^{(n)}(\omega'), x_2^{(n)}(\omega'), \dots\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такую, что $x_n(\omega') \rightarrow x_0(\omega')$ по вероятности (а значит $x_k^{(n)}(\omega') \rightarrow x_k^{(0)}(\omega')$ по вероятности при каждом k), а распределениями величин $x_n(\omega')$ будут служить меры μ_n . т.е. для всех n и всех борелевских множеств A_1, A_2, \dots, A_k из $R^{(m)}$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} P\{x_1^{(n)}(\omega') \in A_1, \dots, x_k^{(n)}(\omega') \in A_k\} = \\ = P\{\xi_n(t_1) \in A_1, \dots, \xi_n(t_k) \in A_k\}. \end{aligned}$$

Пусть $t_{k_r} \rightarrow t$, $t_{k_r} > t$; тогда $\xi_n(t_{k_r}) \rightarrow \xi_n(t)$ по вероятности, значит и $x_{k_r}^{(n)}(\omega')$ будет сходиться по вероятности к некоторой величине. Если t не является элементом последовательности t_1, t_2, \dots , то будем обозначать этот предел через $x^{(n)}(t, \omega')$, если $t = t_k$, то положим $x^{(n)}(t_k, \omega') = x_k^{(n)}(\omega')$. Конечномерные распределения таким образом построенного процесса $x^{(n)}(t, \omega')$, будут совпадать с конечномерными распределениями процесса $\xi_n(t)$. Так как

$$\begin{aligned} P\{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_j)| > \varepsilon\} &= P\{|x_{k_r}^{(n)}(\omega') - x_{j_r}^{(n)}(\omega')| > \varepsilon\}, \\ P\{|x_k^{(0)} - x_j^{(0)}| > 2\varepsilon\} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|x_k^{(n)}(\omega') - x_j^{(n)}(\omega')| > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

то при $t_{k_r} \rightarrow t$ последовательность $x_{k_r}^{(0)}(\omega')$ по (6.1) сходится по вероятности к некоторой случайной величине. Если обозначить этот предел через $x^{(0)}(t, \omega')$, то опять используя (6.1), получим, что

$x^{(0)}(t, \omega')$ — стохастически непрерывный процесс и $\mathbf{P}\{x^{(0)}(t_k, \omega')\} = x_r^{(0)}(\omega') = 1$. Покажем, что для всех t $x^{(n)}(t, \omega')$ сходится по вероятности к $x^0(t, \omega')$. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|x^{(0)}(t, \omega') - x^{(n)}(t, \omega')| > \varepsilon\} &\leq \mathbf{P}\{|x^{(0)}(t, \omega') - \\ &- x^{(0)}(t_k, \omega') > \frac{\varepsilon}{3}\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|x^{(0)}(t_k, \omega') - x^{(n)}(t_k, \omega')| > \frac{\varepsilon}{3}\} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|x^{(n)}(t, \omega') - x^{(n)}(t_k, \omega')| > \frac{\varepsilon}{3}\} = \\ &= \mathbf{P}\{|x^{(0)}(t, \omega') - x^{(0)}(t_k, \omega')| > \frac{\varepsilon}{3}\} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|x^{(n)}(t, \omega') - x^{(n)}(t_k, \omega')| > \frac{\varepsilon}{3}\}. \end{aligned}$$

Правую часть последнего неравенства можно сделать сколько угодно малой выбором малого $|t_k - t|$, используя (6.1) и стохастическую непрерывность $x^{(0)}(t, \omega')$. Теорема доказана.

Замечание 1. В условии теоремы стохастическую непрерывность справа можно заменить стохастической непрерывностью слева.

Замечание 2. Пусть имеется последовательность стохастически непрерывных справа (слева) процессов $\xi_n(t)$, удовлетворяющих условиям (6.1) и

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbf{P}\{|\xi_n(t)| > C\} = 0. \quad (6.2)$$

Тогда можно указать такую последовательность n_k , что будут существовать предельные распределения для конечномерных распределений процессов $\xi_{n_k}(t)$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, из условия (6.2) вытекает компактность последовательности распределений величин $\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_l)$ каковы бы ни были t_1, t_2, \dots, t_l и l . Диагональным методом Кантора можно для любой последовательности построить такую последовательность n_k , чтобы совместное распределение величин $\xi_{n_k}(t_1), \dots, \xi_{n_k}(t_l)$ при любом l сходилось к некоторому предельному распределению. Используя стохастическую непрерывность процессов $\xi_n(t)$ (справа или слева) и (6.1), можно установить, что для всех t'_1, t'_2, \dots, t'_r из $[t_0, T]$ совместное распределение величин $\xi_{n_k}(t'_1), \dots, \xi_{n_k}(t'_r)$ будет сходиться к некоторому предельному распределению.

Следствие 1. Если процессы $\xi_n(t)$ удовлетворяют условиям замечания 2, то для некоторой последовательности n_k можно построить процессы $x_{n_k}(t, \omega')$ на поле вероятностей $\{\Omega, \mathbf{F}', \mathbf{P}'\}$, имеющие те же конечномерные распределения, что и $\xi_{n_k}(t)$ и

сходящиеся по вероятности при $k \rightarrow \infty$ к некоторому процессу $x_0(t, \omega')$.

Следствие 2. Если имеется r последовательностей процессов $\xi_n^{(1)}(t), \dots, \xi_n^{(r)}(t)$, причём каждая последовательность удовлетворяет условиям замечания 2, то для некоторой последовательности n_k можно построить процессы $x_{n_k}^{(1)}(t, \omega'), \dots, x_{n_k}^{(r)}(t, \omega')$ на поле вероятностей $\{\Omega', F', P'\}$, совместные конечномерные распределения которых такие же, как у процессов $\xi_{n_k}^{(1)}(t), \dots, \xi_{n_k}^{(r)}(t)$, причём каждая из последовательностей $\xi_{n_k}^{(1)}(t), \dots, \xi_{n_k}^{(r)}(t)$ будет сходиться по вероятности к некоторому пределу. Это утверждение получается как следствие предыдущего, если рассмотреть составной процесс $\{\xi_n^{(1)}(t), \dots, \xi_n^{(r)}(t)\}$, т. е. процесс в пространстве точек вида $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, где x_i точка из пространства значений $\xi_i(t)$.

В заключение сделаем некоторые замечания относительно использования материала этой главы в последующих главах.

Поле вероятностей всюду будет считаться фиксированным (за исключением тех случаев, когда будет использоваться теорема § 6 и поле $\{\Omega', F', P'\}$, рассмотренное в § 6), поэтому зависимость от элементарного события ω случайных величин и процессов указываться не будет.

Все рассматриваемые процессы будут предполагаться измеримыми и сепарабельными. Если значения процесса $\xi(t)$ будут определяться при каждом t с помощью некоторого предельного перехода, то поскольку при каждом t $\xi(t)$ будет определяться лишь с точностью до ω — множеств меры нуль, то процесс $\xi(t)$ будет определяться с точностью до стохастической эквивалентности. Поэтому всегда можно считать, что в результате того предельного перехода, которым определяется $\xi(t)$, будет получен сепарабельный и измеримый процесс (измеримость будет следствием того, что все процессы, которые мы будем рассматривать, окажутся стохастически непрерывными всюду, за исключением быть может конечного числа точек). Свойства измеримости и сепарабельности нигде не будут оговариваться, но всюду мы будем ими пользоваться.

Глава 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определение стохастического интеграла по процессу броуновского движения

Пусть $w(t)$ — процесс броуновского движения, определенный на $[t_0, T]$. В этом параграфе будет определен для весьма широкого класса функций интеграл

$$\int_{t_0}^T f(t) dw(t), \quad (1.1)$$

который мы и будем называть стохастическим интегралом по процессу броуновского движения. Заметим, что процесс $w(t)$ хотя и непрерывен с вероятностью 1, но с вероятностью 1 имеет на любом отрезке неограниченную вариацию, и поэтому интеграл (1.1) нельзя понимать как обычный интеграл Стильеса.

Рассмотрим совокупность σ -алгебр F_t , определенных для всех $t \in [t_0, T]$ и удовлетворяющих условиям:

а) при $t_1 < t_2$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$,

б) при каждом t $w(t)$ измеримо относительно F_t ,

в) каково бы ни было $t \in [t_0, T]$ и событие $A \in F_t$, величины $w(s_1) - w(t), \dots, w(s_k) - w(t)$ не зависят от A (в вероятностном смысле), если $s_1, \dots, s_k \in [t, T]$ (условия а), б) и в) будут выполняться в том случае, когда F_t будет минимальной σ -алгеброй, содержащей все события из $F([t_0, t], w(s))$ и некоторой σ -алгебры F , такой, что при любых s_1, s_2, \dots, s_k из $[t_0, T]$ величины $w(s_1), \dots, w(s_k)$ не зависят от каждого события из F).

Обозначим через $M(F_t)$ совокупность функций (в этой главе мы будем называть случайные процессы также функциями) $f(t)$, для которых при каждом $t \in [t_0, T]$ $f(t)$ измеримо относительно F_t .

Функция $f(t)$ будет называться ступенчатой, если существуют такие точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, что $f(t) = f(t_i)$ при

$t \in (t_i, t_{i+1})$. Класс всех ступенчатых функций, принадлежащих $M(F_t)$, обозначим через $M_0(F_t)$.

Если $f(t) \in M(F_t)$ и

$$\int_{t_0}^T M |f(t)|^2 dt < \infty,$$

то будем относить $f(t)$ к классу $M_1(F_t)$. Если $f(t)$ является с вероятностью 1 интегрируемой с квадратом, как функция t на отрезке $[t_0, T]$, т. е.

$$P \left\{ \int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\} = 1,$$

то будем относить $f(t)$ к классу $M_2(F_t)$.

Наша цель определить интеграл (1.1) для всех $f(t) \in M_2(F_t)$. Пусть $f(t) \in M_0(F_t)$, т. е. существуют точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ такие, что $f(t) = f(t_i)$ при $t_i \leq t < t_{i+1}$, тогда естественно положить

$$\int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) (\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j)). \quad (1.2)$$

Для интеграла (1.2) выполняются условия:

1. Если

$$f_1(t) \in M_0(F_t) \text{ и } f_2(t) \in M_0(F_t),$$

то

$$\int_{t_0}^T [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] d\omega(t) = \alpha \int_{t_0}^T f_1(t) d\omega(t) + \beta \int_{t_0}^T f_2(t) d\omega(t); \quad (1.3)$$

каковы бы ни были вещественные α и β .

2. Пусть $f(t) \in M_0(F_t)$, а $\psi(t) = 0$, если $\max_{t_0 < s < t} |f(s)| = 0$, $\psi(t) = 1$, если $\max_{t_0 < s < t} |f(s)| > 0$,

тогда

$$\left| \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) \right| \leq \psi(T) \left| \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) \right|. \quad (1.4)$$

3. Если

$$f(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t),$$

то

$$M \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^2 = \int_{t_0}^T \mathbf{M} |f(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

(доказательство двух последних формул вытекает из того, что $w(t_{j+1}) - w(t_j)$ не зависит от $f(t_j)$, $w(t_{k+1}) - w(t_k)$, $f(t_k)$ при $k < j$, а $\mathbf{M}(w(t_{j+1}) - w(t_j)) = 0$, $\mathbf{M}(w(t_{j+1}) - w(t_j))^2 = t_{j+1} - t_j$).

Покажем, что для каждого $f(t) \in M_1(F_t)$ и $\varepsilon > 0$ существует $\bar{f}(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$ такое, что

$$\int_{t_0}^T \mathbf{M} |f(t) - \bar{f}(t)|^2 dt < \varepsilon. \quad (1.7)$$

Положим $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$. Тогда для $f(t) \in M_1(F_t)$ выполняется соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \mathbf{M} |f(t) - f(t)g_N(f(t))|^2 dt = 0; \quad (1.8)$$

так как $|f(t) - f(t)g_N(f(t))| \leq |f(t)|$ следовательно применима теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Учитывая из (1.8), видим, что доказательство (1.7) достаточно провести для ограниченных функций из $M_1(F_t)$. Пусть $\bar{f}(t)$ ограниченная функция из $M_1(F_t)$, а $\alpha(t)$ — числовая функция, ограниченная, неотрицательная, непрерывная, равная нулю при $t \geq 0$ и удовлетворяющая соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) dt = 1.$$

Доопределим $\bar{f}(t)$ равным $\bar{f}(t_0)$ при $t \leq t_0$ и пусть

$$\bar{f}_n(t) = n \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(n(t-s)) \bar{f}(s) ds.$$

$\bar{f}_n(t)$ ограничены той же постоянной, что и $\bar{f}(t)$, непрерывны с вероятностью 1, и так как $\bar{f}(t)$ почти при всех ω измеримо по t , то почти при всех $\omega \in \Omega$ $\bar{f}_n(t) \rightarrow \bar{f}(t)$ и $t \in [t_0, T]$ (для всех t , являющихся при данном ω точками асимптотической непрерывности $\bar{f}(t)$ как функции t). Поэтому на основании уже упомянутой теоремы Лебега

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \mathbf{M} |\bar{f}_n(t) - \bar{f}(t)|^2 dt = 0.$$

Таким образом (1.7) достаточно установить для тех $f(t)$ из $M_1(F_t)$, которые ограничены и с вероятностью 1 непрерывны. Но для таких функций $f(t)$ ступенчатые функции $\bar{f}_n(t) = f(t_0) + \frac{1}{n}[n(t - t_0)]$, где $[a]$ — целая часть a , принадлежит $M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T M |\bar{f}_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$$

(так как $\bar{f}_n(t) \rightarrow f(t)$ с вероятностью 1 для всех $t \in [t_0, T]$). Следовательно, если взять $\bar{f}(t)$ равным $\bar{f}_n(t)$ при достаточно большом n , то (1.7) будет выполняться.

Из (1.7) вытекает, что для каждого $f(t) \in M_1(F_t)$ существует такая последовательность $\bar{f}_n(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T M |f(t) - \bar{f}_n(t)|^2 dt = 0. \quad (1.9)$$

Если последовательность $\bar{f}_n(t)$ удовлетворяет (1.9), тогда из (1.3) и (1.6)

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} M \left| \int_{t_0}^T \bar{f}_n(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T \bar{f}_m(t) d\omega(t) \right|^2 = 0.$$

Таким образом, последовательность случайных величин $\int_{t_0}^T \bar{f}_n(t) d\omega(t)$ будет сходиться по вероятности к некоторой случайной величине. Эту случайную величину мы и будем обозначать $\int_{t_0}^T f(t) d\omega(t)$. Этот интеграл определяется однозначно с точностью до ω — множеств меры нуль. Действительно, если последовательность $\bar{f}'_n(t)$ также удовлетворяет (1.9), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T M |\bar{f}'_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$$

и, следовательно, пределы последовательностей $\int_{t_0}^T \bar{f}'_n(t) d\omega(t)$

и $\int_{t_0}^T \bar{f}_n(t) d\omega(t)$ с вероятностью 1 совпадают. Для $\int_{t_0}^T f(t) d\omega(t)$, если $f(t) \in M_1(F_t)$, сохраняются свойства 1—3, установленные

для того случая, когда $f(t) \in M_0(F_t)$ (это легко установить с помощью предельного перехода в соответствующих равенствах и неравенствах). Из свойства 1 получаем

$$4. \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) \right| > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f(t)| > 0 \right\}. \quad (1.10)$$

Распространим теперь определение интеграла (1.1) на все функции из $M_2(F_t)$. Пусть, как и выше, $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N|x| = 0$ при $|x| > N$. Тогда, если $f(t) \in M_2(F_t)$, функция

$$f_N(t) = f(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |f(s)|^2 ds \right)$$

принадлежит $M_1(F_t)$, так как

$$\int_{t_0}^T \mathbf{M} |f_N(t)|^2 dt \leq \mathbf{M} \int_{t_0}^T |f_N(t)|^2 dt \leq N.$$

Заметим далее, что при $N' > N$

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |f_N(t) - f_{N'}(t)| = 0,$$

если

$$\int_{t_0}^T |f(s)|^2 ds < N.$$

Поэтому на основании (1.10) можем записать:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f_N(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T f_{N'}(t) d\omega(t) \right| > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt \geq N \right\}.$$

Так как $\int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt$ вполне определенная случайная величина, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt \geq N \right\} = 0.$$

Значит $\int_{t_0}^T f_N(t) d\omega(t)$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которая и будет обозначаться через

$\int_{t_0}^T f(t) d\omega(t)$. Используя определение $\int_{t_0}^T f(t) d\omega(t)$, легко установить, что для этого интеграла сохраняются свойства 1 и 4. Кроме того, для этого интеграла справедливо:

5. Если $f_n(t) \in M_2(F_t)$, и $f_n(t) \rightarrow f(t)$ по вероятности почти при всех $t \in [t_0, T]$ и существует такое $\varphi(t) \in M_2(F_t)$, при котором $|f_n(t)|^2 \leq |\varphi(t)|^2$, то

$$\int_{t_0}^T f_n(t) d\omega(t) \rightarrow \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t)$$

по вероятности.

Доказательство. Заметим, что при каждом N

$$f_n(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) \text{ и } f(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right)$$

принадлежат $M_1(F_t)$; поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T f_n(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) d\omega(t) - \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^T f(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) d\omega(t) \right|^2 \leq \\ & \leq \mathbf{M} \int_{t_0}^T |f_n(t) - f(t)|^2 g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

на основании все той же теоремы Лебега, так как

$$|f_n(t) - f(t)|^2 g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) \rightarrow 0$$

по мере, являющейся произведением лебеговой меры на $[t_0, T]$ и меры \mathbf{P} , и

$$|f_n(t) - f(t)|^2 g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) \leq 4 |\varphi(t)|^2 g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right),$$

а

$$\mathbf{M} \int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) dt \leq N.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T f_n(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) d\omega(t) \right| > 0 \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(s)|^2 ds \leq N \right\}, \\ \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f_n(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T f_n(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \right) d\omega(t) \right| > 0 \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(s)|^2 ds \geq N \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому каково бы ни было N , при любом $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T f_n(t) d\omega(t) \right| > \varepsilon \right\} &\leq \\ &\leq 2 \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(s)|^2 ds > N \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ и получаем доказательство свойства 5. Используя это свойство, можно установить, что для интегралов (1.1), когда $f(t) \in M_2(F_t)$, выполняется свойство 1. Для этого нужно применить 5 к последовательности

$$\bar{f}_n(t) = \alpha f_1(t) g_n \left(\int_{t_0}^t |f_1(s)|^2 ds \right) + \beta f_2(t) g_n \left(\int_{t_0}^t |f_2(s)|^2 ds \right),$$

сходящейся к $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ и удовлетворяющей неравенству:

$$|\bar{f}_n(t)|^2 \leq (\alpha^2 + \beta^2) (|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2).$$

§ 2. Стохастический интеграл по процессу броуновского движения как функция верхнего предела

Пусть $f(t) \in M_2(F_t)$, $\chi_A(t)$ — характеристическая функция некоторого борелевского множества A , принадлежащего отрезку $[t_0, T]$. Тогда $f(t)\chi_A(t) \in M_2(F_t)$ и значит имеет смысл

$\int_{t_0}^T f(t) \chi_A(t) d\omega(t)$, который будем обозначать $-\int_A f(t) d\omega(t)$.

В том случае, если A является отрезком $[t_1, t_2]$, вместо

$\int_A f(t) d\omega(t)$ будем писать $\int_{t_1}^{t_2} f(t) d\omega(t)$. В этом параграфе инте-

грал $\int_{t_0}^s f(t) d\omega(t)$ будет изучаться как функция t . Как уже от-

мечалось, значения $\int_{t_0}^s f(t) d\omega(t)$ при различных s согласованы

таким образом, что $\int_{t_0}^s f(t) d\omega(t)$ как функция s является сепара-

бельным процессом. Применяя свойство 2 из § 1 к интегралу

$$\int_{t_0}^t f(s) d\omega(s),$$

можно утверждать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(t) \in M_2(F_t)$ и $\psi(t) = 0$, если $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |f(s)| = 0$, и $\psi(t) = 1$, если $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |f(s)| > 0$. Тогда

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s) \right| \leq \psi(T) \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s) \right|. \quad (2.1)$$

Следствие. Если $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s) \right| < \infty$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s) \right| > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f(t)| > 0 \right\}. \quad (2.2)$$

Теорема 2. Если $f(t) \in M_1(F_t)$, то процесс

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s)$$

является мартингалом.

Доказательство. Из построения интеграла вытекает, что $\zeta(t)$ будет измеримо относительно F_t . Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$M \left(\int_t^{t+h} f(s) d\omega(s) / F_t \right) = 0. \quad (2.3)$$

В том случае, когда $f(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$, т. е. существуют такие точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, что $f(t) = f(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, (2.3) вытекает из того, что при $t \leq t_k$

$$M(f(t_k)[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] / F_t) = M(f(t_k) M(\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k) / F_{t_k}) / F_t) = 0$$

так как

$$M(\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k) / F_{t_k}) = 0.$$

Если выбрать теперь $f_n(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$ так, чтобы $\int_t^{t+h} f_n(s) d\omega(s) \rightarrow \int_t^{t+h} f(s) d\omega(s)$ по вероятности, то поскольку

$$M \left(\int_t^{t+h} f_n(s) d\omega(s) / F_t \right) \rightarrow M \left(\int_t^{t+h} f(s) d\omega(s) / F_t \right)$$

по вероятности, мы получим (2.3) в общем случае.

Теорема доказана.

Теорема 3. Для всякого $f(t) \in M_2(F_t)$ процесс

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s)$$

является с вероятностью 1 непрерывным процессом.

Доказательство. Если $f(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$, то непрерывность $\zeta(t)$ усматривается непосредственно из формулы

$$\zeta(t) = \sum_{t_{k+1} < t} f(t_k) [\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] + f(t) [\omega(t) - \omega(\sup_{t_k < t} t_k)],$$

если $f(t) = f(t_i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, ввиду непрерывности с вероятностью 1 процесса $\omega(t)$.

Пусть теперь $f(t) \in M_1(F_t)$. В этом случае можно построить последовательность $f_n(t) \in M_0(F_t) \cap M_1(F_t)$, для которой выполнялось бы (1.9). Положим

$$\zeta_n(t) = \int_{t_0}^t f_n(s) d\omega(s).$$

Тогда $\zeta_n(t)$ непрерывны с вероятностью 1. Далее,

$$\zeta_n(t) - \zeta(t) = \int_{t_0}^t [f_n(s) - f(s)] dw(s)$$

является мартингалом. Поэтому на основании свойства 5 § 5, гл. I получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\sup_{t_0 < t \leq T} |\zeta_n(t) - \zeta(t)|^2) &\leq 4\mathbf{M}|\zeta_n(T) - \zeta(T)|^2 = \\ &= 4 \int_{t_0}^T \mathbf{M}|f_n(t) - f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

(в упомянутом свойстве 5 положили $\alpha = 2$).

Выберем последовательность n_k , чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_{t_0}^T \mathbf{M}|f_{n_k}(t) - f(t)|^2 dt$$

сходилсся. Тогда будет сходиться ряд

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 < t \leq T} |\zeta_{n_k}(t) - \zeta(t)| > \frac{1}{k} \right\} &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbf{M} \left(\sup_{t_0 < t \leq T} |\zeta_{n_k}(t) - \zeta(t)|^2 \right); \end{aligned}$$

поэтому на основании леммы Бореля — Кантелли можно утверждать, что с вероятностью 1 существует такой номер, начиная с которого выполняются неравенства

$$\sup_{t_0 < t \leq T} |\zeta_{n_k}(t) - \zeta(t)| \leq \frac{1}{k},$$

т. е. с вероятностью 1 $\zeta_{n_k}(t)$, как функции t , сходятся равномерно к $\zeta(t)$. Так как $\zeta_{n_k}(t)$ с вероятностью 1 непрерывны, то $\zeta(t)$ будет с вероятностью 1 непрерывно.

Рассмотрим наконец $f(t)$ из $M_2(\mathbf{F}_t)$. Пусть $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$. Тогда на основании следствия из теоремы 1

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 < t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) dw(s) - \int_{t_0}^t f(s) g_N \left(\int_{t_0}^s |f(u)|^2 du \right) dw(s) \right| > 0 \right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt > N \right\}. \quad (2.4)$$

Так как

$$f(t) g_N \left(\int_{t_0}^t |f(s)|^2 ds \right) \in M_1(F_t)$$

то

$$\int_{t_0}^t f(s) g_N \left(\int_{t_0}^s |f(u)|^2 du \right) dw(s)$$

с вероятностью 1 непрерывен. Значит для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такой с вероятностью 1 непрерывный процесс, что

$\int_{t_0}^t f(s) dw(s)$ будет отличаться от этого процесса, как функция t , лишь на ω — множестве меры не более ε . Из этого утверждения вытекает доказательство теоремы.

Теорема 4. Пусть $f(t)$ и $|f(t)|^2$ входят в $M_1(F_t)$. Тогда выполняется соотношение

$$\mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^4 \leq 36(T - t_0) \int_{t_0}^T \mathbf{M} |f(t)|^4 dt.$$

Доказательство. Пусть $f(t) = f(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, где $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, и $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^4 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M} |f(t_k)|^4 \mathbf{M} (w(t_{k+1}) - w(t_k))^4 + \\ &+ 6 \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^{k-1} f(t_j) (w(t_{j+1}) - w(t_j)) \right|^2 |f(t_k)|^2 \mathbf{M} (w(t_{k+1}) - w(t_k))^2 = \\ &= 3 \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M} |f(t_k)|^4 (t_{k+1} - t_k)^2 + \\ &+ 6 \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M} \left| \int_{t_0}^{t_k} f(t) dw(t) \right|^2 |f(t_k)|^2 (t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Так как при $f(t) \in M_0(F_t)$ можно считать $\max_k (t_{k+1} - t_k)$ как

угодно малым, то переходя к пределу при $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, получим

$$M \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^4 = 6 \int_{t_0}^T M \left| \int_{t_0}^t f(s) dw(s) \right|^2 |f(t)|^2 dt. \quad (2.5)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^4 &\leq 6 \sqrt{\int_{t_0}^T M \left| \int_{t_0}^t f(s) dw(s) \right|^4 dt} \times \\ &\times \sqrt{\int_{t_0}^T M |f(t)|^4 dt} \leq 6 \sqrt{(T - t_0) M \left| \int_{t_0}^T f(t) dw(t) \right|^4} \times \\ &\times \sqrt{\int_{t_0}^T M |f(t)|^4 dt}, \end{aligned}$$

так как $M \left| \int_{t_0}^t f(s) dw(s) \right|^4$, как вытекает из (2.5), является мо-

нотонно возрастающей функцией t . Из последнего неравенства вытекает доказательство теоремы для того случая, когда $f(t) \in M_0(F_t)$. Доказательство для общего случая легко получить с помощью предельного перехода от функций, принадлежащих $M_0(F_t)$. Поэтому проведение доказательства для общего случая предоставляется читателям.

Определение. Будем говорить, что процесс $\zeta(t)$, определенный на $[t_0, T]$ имеет стохастический дифференциал $d\zeta(t)$, равный $a(t)dt + b(t)dw(t)$, если для всех t_1 и t_2 из $[t_0, T]$ с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) dw(t), \quad (2.6)$$

причём $a(t)$ и $b(t)$ принадлежат $M_2(F_t)$. В дальнейшем будут использоваться стохастические дифференциалы, так как они позволяют записывать соотношения типа (2.6) в более компактной форме.

Теорема 5. Пусть $\zeta(t)$ числовой процесс, удовлетворяющий при $t \in [t_0, T]$ соотношению

$$d\zeta(t) = a(t)dt + b(t)dw(t),$$

причём $a(t)$, $b(t)$ и $b^2(t)$ принадлежат $M_2(F_t)$. Если $\Phi(t, x)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные

$\Phi'_t(t, x)$, $\Phi'_x(t, x)$ и $\Phi''_{xx}(t, x)$ при $t \in [t_0, T]$, $x \in (-\infty, \infty)$, то процесс $\eta(t) = \Phi(t, \zeta(t))$ удовлетворяет соотношению

$$d\eta(t) = [\Phi'_t(t, \zeta(t)) + \Phi'_x(t, \zeta(t))a(t) + \frac{1}{2}\Phi''_{xx}(t, \zeta(t))b^2(t)]dt + \Phi'_x(t, \zeta(t))b(t)d\omega(t).$$

Доказательство. Нужно показать, что при $t' < t''$

$$\eta(t'') - \eta(t') = \int_{t'}^{t''} \left[\Phi'_t(t, \zeta(t)) + \Phi'_x(t, \zeta(t))a(t) + \frac{1}{2}\Phi''_{xx}(t, \zeta(t))b^2(t) \right] dt + \int_{t'}^{t''} \Phi'_x(t, \zeta(t))b(t)d\omega(t). \quad (2.7)$$

Возьмём разбиение отрезка $[t', t'']$: $t' = t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1} = t''$ и запишем

$$\begin{aligned} \eta(t'') - \eta(t') &= \sum_{k=1}^m (\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^m (\Phi(t_{k+1}, \zeta(t_{k+1})) - \Phi(t_k, \zeta(t_k))) = \sum_{k=1}^m [\Phi(t_{k+1}, \zeta(t_{k+1})) - \\ &\quad - \Phi(t_k, \zeta(t_{k+1}))] + \sum_{k=1}^m (\Phi(t_k, \zeta(t_{k+1})) - \Phi(t_k, \zeta(t_k))). \end{aligned}$$

Применяя к каждому слагаемому формулу Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} \eta(t'') - \eta(t') &= \sum_{k=1}^m \Phi'_t(t_k + \Theta_k(t_{k+1} - t_k), \zeta(t_{k+1}))(t_{k+1} - t_k) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k))[\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Phi''_{xx}(t_k, \xi(t_k) + \bar{\Theta}_k(\zeta(t_{k+1}) - \xi(t_k)))[\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]^2, \end{aligned}$$

где Θ_k и $\bar{\Theta}_k$ лежат в $(0, 1)$. Из непрерывности $\Phi'_t(t, x)$ и $\zeta(t)$ вытекает, что первая сумма в правой части последнего равенства будет сходиться к $\int_{t'}^{t''} \Phi'_t(t, \zeta(t))dt$, если $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

Далее

$$\sum_{k=1}^m \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k)) [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)] = \sum_{k=1}^m \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt + \\ + \sum_{k=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k)) b(t) d\omega(t).$$

Первая сумма сходится к $\int_{t'}^{t''} \Phi'_x(t, \zeta(t)) a(t) dt$, если $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$. Обозначим $f_m(t) = \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k)) b(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда $f_m(t) \rightarrow \Phi'_x(t, \zeta(t)) b(t)$ с вероятностью 1 при $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$; кроме того,

$$|f_m(t)|^2 \leq \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\Phi'_x(t, \zeta(t))|^2 b^2(t)$$

(конечность $\sup_{t_0 \leq t \leq T} |\Phi'_x(t, \zeta(t))|$ вытекает из непрерывности с вероятностью 1 процесса $\Phi'_x(t, \zeta(t))$). Поэтому на основании свойства 5 из § 1 можно заключить, что

$$\int_{t'}^{t''} f_m(t) d\omega(t) \rightarrow \int_{t'}^{t''} \Phi'_x(t, \zeta(t)) b(t) d\omega(t)$$

по вероятности, т. е.

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi'_x(t_k, \zeta(t_k)) b(t) d\omega(t) \rightarrow \\ \rightarrow \int_{t'}^{t''} \Phi'_x(t, \zeta(t)) b(t) d\omega(t)$$

по вероятности.

Для доказательства теоремы остается показать, что

$$\sum_{k=1}^m \Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) (\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k))^2 \rightarrow \\ \rightarrow \int_{t'}^{t''} \Phi''_{xx}(t, \zeta(t)) b^2(t) dt \quad (2.8)$$

по вероятности.

Для доказательства (2.8) установим некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Равномерно по всем разбиениям отрезка $[t', t'']$ величина $\sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) dw(t) \right)^2$ ограничена по вероятности.

Доказательство. При всяком $N > 0$ и $C > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) dw(t) \right)^2 > C \right\} &\leq P \left\{ \int_{t_0}^T b^2(t) dt > N \right\} + \\ &+ P \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) g_N \left(\int_{t_0}^t b^2(s) ds \right) dw(t) \right)^2 > C \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{C} M \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) g_N \left(\int_{t_0}^t b^2(s) ds \right) dw(t) \right)^2 + \\ &+ P \left\{ \int_{t_0}^T b^2(t) dt > N \right\} \leq \frac{N}{C} + P \left\{ \int_{t_0}^T b^2(t) dt > N \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Если $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, то $\sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt \right)^2 \rightarrow 0$

по вероятности. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^m (t_{k+1} - t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} a^2(t) dt \leq \\ &\leq \max_k (t_{k+1} - t_k) \int_{t'}^{t''} a^2(t) dt. \end{aligned}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что

$$\sum_{k=1}^m \Phi'_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt \right)^2 \rightarrow 0$$

по вероятности,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^m \Phi'_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right|^2 \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^m \left| \Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) \right|^2 \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt \right)^2 \times \\
& \times \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

по вероятности, так как

$$\begin{aligned}
& \sup_k |\Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)])| \leq \\
& \leq \sup_t \sup_{|x| \leq \sup_s |\zeta(s)|} |\Phi''_{xx}(t, x)|.
\end{aligned}$$

Поэтому для доказательства теоремы остаётся показать, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \Phi'_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{t'}^{t''} \Phi''_{xx}(t, \zeta(t)) b^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Из непрерывности $\zeta(t)$ и $\Phi''_{xx}(t, x)$ вытекает, что

$$\sup_k |\Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k) + \bar{\Theta}_k [\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)]) - \Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k))| \rightarrow 0$$

по вероятности. При этом

$$\begin{aligned}
& \lim_{\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \Phi''_{xx}(t_k, \zeta(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} b^2(t) dt = \\
& = \int_{t'}^{t''} \Phi''_{xx}(t, \zeta(t)) b^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Следовательно, доказательство теоремы будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 3. Если $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, то

$$\sum_{k=1}^m \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b^2(t) dt \right] \rightarrow 0$$

по вероятности.

Доказательство. Обозначим

$$b_N(t) = b(t) g_N \left(\int_{t_0}^t b^4(u) du \right).$$

Пусть далее $\chi(t) = 1$, если $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\zeta(s)| \leq C$, и $\chi(t) = 0$, если $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\zeta(s)| > C$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^m \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b^2(t) dt \right] \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^m \chi(t_k) \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right] \right| > \varepsilon \right\} + \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T b^4(t) dt > N \right\} + \\ & \quad + \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\zeta(t)| > C \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^m \chi(t_k) \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right] \right)^2 = \\ & = \sum_{k=1}^m \mathbf{M} \left[\chi(t_k) \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \right]^2 \times \\ & \quad \times \mathbf{M} \left(\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right]^2 \middle| \mathbf{F}_{t_k} \right) \end{aligned}$$

(так как все удвоенные произведения после взятия математического ожидания пропадут, ввиду того, что

$$\mathbf{M} \left(\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right]^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \middle| \mathbf{F}_{t_k} \right) = 0.$$

Далее,

$$\chi(t_k) |\Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k))| \leq L,$$

где $L = \sup_{\substack{t_0 \leq t \leq T \\ |x| \leq C}} |\Phi_{xx}^*(t, x)|$,

а

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right]^2 &\leq 2 \mathbf{M} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right]^4 + \\ &+ 2 \mathbf{M} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right]^2 \leq 72 (t_{k+1} - t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{M} b_N^4(t) dt + \\ &+ 2 (t_{k+1} - t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{M} b_N^4(t) dt = 74 (t_{k+1} - t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{M} b_N^4(t) dt \end{aligned}$$

(мы воспользовались теоремой 4 для первого интеграла и неравенством Коши — Буняковского — для второго). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^m \chi(t_k) \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right] \right)^2 &\leq \\ &\leq 74 \lambda L^2 \int_{t'}^{t''} \mathbf{M} b_N^4(t) dt \leq 74 L^2 \lambda N, \end{aligned}$$

где $\lambda = \max_k (t_{k+1} - t_k)$, так что при $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^m \chi(t_k) \Phi_{xx}^*(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N(t) d\omega(t) \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_N^2(t) dt \right] \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^m \Phi'_{xx}(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b^2(t) dt \right] \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T b^4(t) dt > N \right\} + \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\zeta(t)| > C \right\}.$$

Правую часть последнего неравенства выбором достаточно больших C и N можно сделать сколько угодно малой. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^m \Phi'_{xx}(t_k, \zeta(t_k)) \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) d\omega(t) \right)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b^2(t) dt \right] \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Лемма, а с ней и теорема доказаны.

§ 3. Стохастический интеграл по мартингалу

Пусть $\eta(t)$ мартингал с числовыми значениями, определенный на $[t_0, T]$, а \mathbf{F}_t — совокупность σ -алгебр, определенных при каждом $t \in [t_0, T]$, причём $\eta(t)$ при каждом t измеримо относительно \mathbf{F}_t , а при $t_1 < t_2$ $\mathbf{F}_{t_1} \subset \mathbf{F}_{t_2}$ и

$$\mathbf{M}(\eta(t_2) - \eta(t_1) / \mathbf{F}_{t_1}) = 0. \quad (3.1)$$

Предположим, что существует такая неубывающая функция $\lambda(t)$, определенная при $t \in [t_0, T]$, что при $t_1 < t_2$

$$\mathbf{M}((\eta(t_2) - \eta(t_1))^2 / \mathbf{F}_{t_1}) = \lambda(t_2) - \lambda(t_1). \quad (3.2)$$

Обозначим через $M(\mathbf{F}_t)$ совокупность функций $f(t)$, определенных на $[t_0, T]$ таких, что при каждом $t \in [t_0, T]$ $f(t)$ измеримо относительно \mathbf{F}_t . $M_0(\mathbf{F}_t)$, как и выше, будет обозначать класс ступенчатых функций, принадлежащих $M(\mathbf{F}_t)$, а $M_1(\mathbf{F}_t; \lambda(t))$ и $M_2(\mathbf{F}_t; \lambda(t))$ будут обозначать классы функций, для которых соответственно

$$\int_{t_0}^T \mathbf{M}|f(t)|^2 d\lambda(t) < \infty \text{ и } \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T |f(t)|^2 d\lambda(t) < \infty \right\} = 1.$$

Определим теперь интеграл

$$\int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \quad (3.3)$$

для всех $f(t) \in M_2(F_t; \lambda(t))$. Если $f(t) \in M_0(F_t; \lambda(t))$, т. е. существуют такие точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, что $f(t) = f(t_k)$ при $t \in (t_k, t_{k+1})$, тогда

$$\int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)). \quad (3.4)$$

Распространение определения интеграла (3.3) на все функции из $M_2(F_t, \lambda(t))$ производится точно таким же образом, как в § 1 определение интеграла (1.1) распространялось с класса $M_n(F_t)$ на класс $M_2(F_t)$. Таким образом, определенный интеграл (3.3) будет обладать следующими свойствами:

1) если $\chi(t) = 0$ при $\sup_{t_0 < s < t} |f(s)| = 0$ и $\chi(t) = 1$ при $\sup_{t_0 < s < t} |f(s)| > 0$, то

$$\left| \int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \right| \leq \chi(T) \left| \int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \right|, \quad (3.5)$$

и значит

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \right| > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 < t < T} |f(t)| > 0 \right\}; \quad (3.6)$$

2) если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ принадлежат $M_2(F_t; \lambda(t))$, а α и β произвольные вещественные числа, то

$$\int_{t_0}^T (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) d\eta(t) = \alpha \int_{t_0}^T f_1(t) d\eta(t) + \beta \int_{t_0}^T f_2(t) d\eta(t); \quad (3.7)$$

3) если $f(t) \in M_1(F_t; \lambda(t))$, то

$$\mathbf{M} \left(\int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T f(t) d\eta(t) \right|^2 = \int_{t_0}^T \mathbf{M} |f(t)|^2 d\lambda(t); \quad (3.9)$$

4) если $f_n(t) \rightarrow f(t)$ по вероятности почти для всех t по мере $\mu(A)$ такой, что $\mu(A) = \int_A d\lambda(t)$, и существует $\varphi(t) \in M_2(F_t; \lambda(t))$, такое что $|f_n(t)| \leq |\varphi(t)|$, то

$$\int_{t_0}^T f_n(t) d\eta(t) \rightarrow \int_{t_0}^T f(t) d\eta(t)$$

по вероятности.

Пусть $\chi_A(t)$ — характеристическая функция борелевского множества A , принадлежащего отрезку $[t_0, T]$. Тогда для всякой функции $f(t) \in M_2(F_t, \lambda(t))$ существует

$$\int f(t) \chi_A(t) d\eta(t),$$

который мы будем обозначать $\int_A f(t) d\eta(t)$. Если A — отрезок

$[t_1, t_2]$, то вместо $\int_A f(t) d\eta(t)$ будем писать $\int_{t_1}^{t_2} f(t) d\eta(t)$. Рас-

смотрим $\int_{t_0}^t f(s) d\eta(s)$ как функцию верхнего предела. Таким же образом, как в § 2, можно установить следующие свойства этой функции:

5) если $f(t) \in M_1(F_t; \lambda(t))$, то $\zeta(t) = \int_{t_0}^t f(s) d\eta(s)$ является мартингалом, причём для $t_1 < t$

$$M\left(\int_{t_0}^t f(s) d\eta(s) / F_{t_1}\right) = \int_{t_0}^{t_1} f(s) d\eta(s);$$

6) если $x(t)$ такое же, как в формулировке свойства 1), то

$$\sup_{t_0 < t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\eta(s) \right| \leq \chi(T) \sup_{t_0 < t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\eta(s) \right|, \quad (3.10)$$

и значит при $\sup_{t_0 < t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\eta(s) \right| < \infty$

$$P\left\{ \sup_{t_0 < t \leq T} \left| \int_{t_0}^t f(s) d\eta(s) \right| > 0 \right\} \leq P\left\{ \sup_{t_0 < t \leq T} |f(t)| > 0 \right\}; \quad (3.11)$$

7) $\int_{t_0}^t f(s) d\eta(s)$ как функция t с вероятностью 1 не имеет раз-

рывов второго рода. Это свойство для случая $f(t) \in M_1(F_t; \lambda(t))$ вытекает из свойства 3) мартингалов, приведенного в § 5 гл. 1. Распространение этого свойства на $f(t) \in M_2(F_t; \lambda(t))$ производится таким же образом, как и в теореме 3 предыдущего параграфа.

Нам будет нужна впоследствии следующая теорема о предельном переходе под знаком стохастического интеграла.

Теорема. Пусть последовательность мартингалов $\eta_n(t)$ при каждом t сходится по вероятности к процессу броуновского движения $w(t)$, причём $\lambda_n(t) = M\eta_n(t)^2$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $t - t_0$. Пусть далее $f_n(t)$ последовательность, такая что существуют интегралы $\int_{t_0}^T f_n(t) d\eta_n(t)$, при каждом t $f_n(t)$ сходится по вероятности к функции $f(t)$, для которой существует

$$\int_{t_0}^T f(t) dw(t).$$

Если, кроме того, для $f_n(t)$ выполняются условия:

а) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $C > 0$, что для всех n

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f_n(t)| > C \right\} \leq \varepsilon,$$

б) для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_1 - t_2| < h} P \{ |f_n(t_2) - f_n(t_1)| > \varepsilon \} = 0,$$

тогда

$$\int_{t_0}^T f_n(t) d\eta_n(t) \rightarrow \int_{t_0}^T f(t) dw(t)$$

по вероятности.

Доказательство. Пусть $\varphi_C(x) = 1$ при $|x| \leq C$, $\varphi_C(x) = |x| + 1 - C$ при $|x| \in [C, C+1]$ и $\varphi_C(x) = 0$ при $|x| > C+1$.

Тогда для всех n

$$P \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) - \int_{t_0}^T f_n(t) d\eta_n(t) \right| > 0 \right\} \leq \\ \leq P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f_n(t)| > C \right\},$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f(t)) f(t) d\omega(t) - \int_{t_0}^T f(t) d\omega(t) \right| > 0 \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f(t)| > C \right\} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |f_n(t)| > C \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому в связи с условием а) для доказательства теоремы достаточно показать, что для всех $C > 0$

$$\int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) \rightarrow \int_{t_0}^T \varphi_C(f(t)) f(t) d\omega(t)$$

по вероятности.

Из условия б) вытекает, что $f(t)$ стохастически непрерывный процесс. Пусть $t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ произвольное разбиение отрезка $[t_0, T]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) - \int_{t_0}^T \varphi_C(f(t)) f(t) d\omega(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) - \sum_{r=0}^{k-1} f_n(t_r) \varphi_C(f_n(t_r)) (\eta_n(t_{r+1}) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \eta_n(t_r)) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f(t)) f(t) d\omega(t) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{r=0}^{k-1} f(t_r) \varphi_C(f(t_r)) (\omega(t_{r+1}) - \omega(t_r)) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \\ & \quad + \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{r=0}^{k-1} f_n(t_r) \varphi_C(f_n(t_r)) [\eta_n(t_{r+1}) - \eta_n(t_r)] - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{r=0}^{k-1} f(t_r) \varphi_C(f(t_r)) [\omega(t_{r+1}) - \omega(t_r)] \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Последняя вероятность сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $f_n(t_r)$, $\varphi_C(f_n(t_r))$ и $\eta_n(t_{r+1}) - \eta_n(t_r)$ сходятся по вероятности соответственно к $f(t)$, $\varphi_C(f(t))$ и $\omega(t_{r+1}) - \omega(t_r)$. Покажем, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_r |t_{r+1} - t_r| \rightarrow 0}} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) - \right. \right.$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1} f_n(t_r) \varphi_C(f_n(t_r)) [\eta_n(t_{r+1}) - \eta_n(t_r)] \Big| > \frac{\varepsilon}{3} \Big\} = 0 \quad (3.12)$$

и

$$\lim_{\max_r |t_{r+1} - t_r| \rightarrow 0} P \left\{ \int_{t_0}^T \varphi_C(f(t)) f(t) d\omega(t) - \sum_{r=0}^{k-1} f(t_r) \varphi_C(f(t_r)) [\omega(t_{r+1}) - \omega(t_r)] \Big| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} = 0. \quad (3.13)$$

Оба эти соотношения доказываются одинаково. Докажем первое. Пусть $\lambda = \max_r (t_{r+1} - t_r)$. Тогда

$$\begin{aligned} & P \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi_C(f_n(t)) f_n(t) d\eta_n(t) - \sum_{r=0}^{k-1} f_n(t_r) (\varphi_C(f_n(t_r)) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times (\eta_n(t_{r+1}) - \eta_n(t_r)) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \leq \\ & \leq \frac{9}{\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{k-1} \int_{t_r}^{t_{r+1}} M |\varphi_C(f_n(t)) f_n(t) - \varphi_C(f_n(t_r)) f_n(t_r)|^2 d\lambda_n(t) \leq \\ & \leq \frac{9}{\varepsilon^2} [\lambda_n(T) - \lambda_n(t_0)] \max_{|t' - t''| \leq \lambda} M |\varphi_C(f_n(t')) f_n(t') - \\ & \quad - \varphi_C(f_n(t'')) f_n(t'')|^2. \end{aligned}$$

При этом условие б) влечёт выполнение соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|t' - t''| \leq \lambda} M |\varphi_C(f_n(t')) f_n(t') - \varphi_C(f_n(t'')) f_n(t'')|^2 = 0.$$

Кроме того, $\lambda_n(T) - \lambda_n(t_0) \rightarrow T - t_0$. Так что (3.12) доказано. Из (3.12) и (3.13) вытекает доказательство теоремы.

§ 4. Стохастические интегралы по некоторым случайным мерам

Пусть X — некоторое множество, \mathbf{B} σ -алгебра подмножеств. Мы будем говорить, что на \mathbf{B} задана случайная мера μ , если для всякого $A \in \mathbf{B}$ определена случайная величина $\mu(A)$; причём выполняется условие: если A_k — последовательность

попарно не пересекающихся множеств из \mathbf{B} и $A = \bigcup_k A_k$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \text{ сходится по вероятности к } \mu(A).$$

Если при попарно не пересекающихся множествах A_1, A_2, \dots, A_k величины $\mu(A_1), \mu(A_2), \dots, \mu(A_k)$ независимы в совокупности, то меру μ будем называть мерой с независимыми значениями. В дальнейшем широко будут использоваться две конкретные меры с независимыми значениями.

Пусть $[t_0, T] \times R^{(m)}$ пространство пар точек (t, u) , для которых $t \in [t_0, T]$, $u \in R^{(m)}$, \mathbf{B} — кольцо всех борелевских множеств A из $[t_0, T] \times R^{(m)}$, для которых

$$\int_A \frac{du dt}{|u|^{m+1}} < \infty. \quad (4.1)$$

Обозначим через $p(A)$ случайную меру с независимыми значениями, определённую на \mathbf{B} , для которой $p(A)$ при каждом $A \in \mathbf{B}$ имеет распределение Пуассона с параметром (4.1). Через $q(A)$ будем обозначать случайную меру, определяемую соотношением

$$q(A) = p(A) - Mp(A). \quad (4.2)$$

Меру $p(A)$ можно построить следующим образом. Пусть $\xi(t)$ однородный процесс с независимыми приращениями, принимающий значения из $R^{(m)}$, для которого

$$\begin{aligned} M e^{i(z, \xi(t))} = \exp \left\{ t \left[\int_{|u| < 1} \left(e^{i(z, u)} - 1 - i(z, u) \right) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{|u| > 1} (e^{i(z, u)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Процесс $\xi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода. Если обозначить через $p(A)$ число разрывов процесса $\xi(t)$, для которых точка $(t, \xi(t+0) - \xi(t-0))$ принадлежит A , то $p(A)$ будет иметь распределение Пуассона с параметром (4.1), и для не пересекающихся множеств A_k величины $p(A_k)$ будут независимы.

Предположим, что для каждого $t \in [t_0, T]$ определена σ -алгебра событий F_t такая, что при $A \subset [t_0, t] \times R^{(m)}$ (т. е. если в A могут входить только те точки (s, u) , для которых $s \in [t_0, t]$, величина $p(A)$ измерима относительно F_t , и каковы бы ни были множества A_1, A_2, \dots, A_k из $[t, T] \times R^{(m)}$, величины $p(A_k)$ в совокупности не зависят от всякого события из F_t . Обозначим через $\overline{M}(F_t)$ совокупность измеримых случайных функций $f(t, u)$ таких, что $f(t, u)$ при каждом t измерима относительно F_t , каково

бы ни было u . Функция $f(t, u)$ будет называться ступенчатой, если существуют такие $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ и борелевские множества B_1, B_2, \dots, B_n в $R^{(m)}$, что $f(t, u)$ постоянна на каждом множестве $[t_k, t_{k+1}) \times B_j$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, n$, причём $\bigcup B_j = R^{(m)}$. Совокупность ступенчатых функций из $M_0(F_t)$, для которых существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(t, u) = 0$ при $|u| \leq \varepsilon$, будем обозначать через $M_0(F_t)$.

Пусть далее $\overline{M}_p^{(1)}(F_t)$ — совокупность функций, для которых

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} > \infty,$$

$M_p^{(2)}(F_t)$ — совокупность функций $f(t, u)$, для которых

$$P \left\{ \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} |f(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} < \infty \right\} = 1,$$

$M_q^{(1)}(F_t)$ — совокупность функций $f(t, u)$, для которых

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} < \infty,$$

$\overline{M}_q^{(2)}(F_t)$ — совокупность функций $f(t, u)$, для которых

$$P \left\{ \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} |f(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} < \infty \right\} = 1.$$

Определим теперь интегралы по мерам p и q . Это определение весьма сходно с определением интеграла (1.1), поэтому доказательства не будут подробными.

Начнём со второго интеграла. Пусть $f(t, u) \in \overline{M}_0(F_t)$, т. е. существуют такие $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ и B_1, B_2, \dots, B_n из $R^{(m)}$, $\bigcup B_j = R^{(m)}$, что $f(t, u)$ постоянно на множествах $[t_k, t_{k+1}) \times B_j$.

Взяв $u_j \in B_j$, полагаем

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}} f(t_k, u_j) q([t_k, t_{k+1}) \times B_j). \quad (4.4)$$

Интеграл, определенный формулой (4.4), обладает следующими свойствами:

- 1) если α и β вещественные числа, то

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} (\alpha f_1(t, u) + \beta f_2(t, u)) q(dt \times du) = \\ & = \alpha \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_1(t, u) q(dt \times du) + \beta \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_2(t, u) q(dt \times du); \end{aligned}$$

2) если $\chi(t) = 0$ при $\sup_{u \in R^{(m)}} \sup_{s \in [t_0, t]} |f(s, u)| = 0$ и $\chi(t) = 1$ при $\sup_{u \in R^{(m)}} \sup_{s \in [t_0, t]} |f(s, u)| > 0$, то

$$\left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) \right| \leq \chi(T) \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) \right|, \quad (4.5)$$

и значит

$$\begin{aligned} & P \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) \right| > 0 \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{u \in R^{(m)}} \sup_{s \in [t_0, T]} |f(s, u)| > 0 \right\}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

3) если, кроме того, $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(1)}(F_t)$, то

$$M \left(\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$M \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) \right|^2 = \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}}. \quad (4.8)$$

Для каждого $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(1)}(F_t)$ существует последовательность $f_n(t, u) \in \overline{M}_0(F_t) \cap \overline{M}_q^{(1)}(F_t)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f_n(t, u) - f(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} = 0 \quad (4.9)$$

(Это доказывается таким же образом, как и (1.9). Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f_l(t, u) - f_n(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} = 0, \quad (4.10)$$

и значит последовательность случайных величин

$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_n(t, u) q(dt \times du)$ будет сходиться по вероятности к некоторой случайной величине, которую мы и будем обозначать

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du)$$

в том случае, когда $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(1)}(F_t)$. Для этого интеграла также выполняются свойства 1)–3).

Пусть теперь $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(2)}(F_t)$, $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$. Тогда для всех N

$$f_N(t, u) = f(t, u) g_N \left(\int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} |f(s, u)|^2 \frac{ds du}{|u|^{m+1}} \right)$$

принадлежит $\overline{M}_q^{(1)}(F_t)$ и, следовательно, имеет смысл

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) q(dt \times du).$$

Но при $N' > N$ при помощи (4.6) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_{N'}(t, u) q(dt \times du) - \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) q(dt \times du) \right| > 0 \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} |f(t, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} > N \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Так как вероятность в правой части (4.11) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, то при $N \rightarrow \infty$ существует предел величин $\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) q(dt \times du)$ в смысле сходимости по вероятности, который мы и будем обозначать $\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du)$. Кроме свойств 1 и 2, для этого интеграла имеет место свойство

4) если $f_n(t, u) \rightarrow f(t, u)$ по вероятности почти для всех t и u , и существует $\varphi(t, u) \in \overline{M}_q^{(2)}(F_t)$ такая, что $|f_n(t, u)| \leq |\varphi(t, u)|$, тогда

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_n(t, u) q(dt \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du)$$

по вероятности при $n \rightarrow \infty$.

Перейдем к определению интеграла по мере p .

Если $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(2)}(\mathbf{F}_t) \cap \overline{M}_p^{(2)}(\mathbf{F}_t)$, то полагаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) &= \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) q(dt \times du) + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) \frac{dt du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Определённый интеграл будет обладать свойствами:

5) для вещественных α и β

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} [\alpha f_1(t, u) + \beta f_2(t, u)] p(dt \times du) = \\ &= \alpha \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_1(t, u) p(dt \times du) + \beta \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_2(t, u) p(dt \times du); \end{aligned}$$

6) если $\chi(t)$ определяется так же, как во 2), то

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) \right| > 0 \right\} \leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t_0 \leq t \leq T \\ u \in R^{(m)}}} |f(t, u)| > 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

и

$$\left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) \right| \leq \chi(T) \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) \right|; \quad (4.14)$$

7) если $f(t, u) \in \overline{M}_p^{(1)}(\mathbf{F}_t)$, то

$$\mathbf{M} \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) \right| \leq \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} \mathbf{M} |f(t, u)| \frac{du dt}{|u|^{m+1}}. \quad (4.15)$$

Для каждой функции $f(t, u) \in \overline{M}_p^{(1)}(F_t)$ можно построить последовательность $f_n(t, u) \in \overline{M}_p^1 \cap \overline{M}_q^{(2)}(F_t)$ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f_n(t, u) - f(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} = 0. \quad (4.16)$$

Тогда

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} M |f_l(t, u) - f_n(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} = 0.$$

Поэтому последовательность величин $\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_n(t, u) p(dt \times du)$

будет сходиться по вероятности к некоторому пределу, который будем обозначать через

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du).$$

Пусть $f(t, u) \in \overline{M}_p^{(2)}(F_t)$, тогда при каждом N

$$f_N(t, u) = f(t, u) g_N \left(\int_{t_0}^t |f(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} \right)$$

принадлежит $\overline{M}_p^{(1)}(F_t)$, причём для $N' > N$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) p(dt \times du) - \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_{N'}(t, u) p(dt \times du) \right| > \right. \\ & \left. > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} |f(t, u)| \frac{dt du}{|u|^{m+1}} > N \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) p(dt \times du)$ в смысле

сходимости по вероятности, который мы будем называть $\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du)$ для $f(t, u) \in \overline{M}_p^{(2)}(F_t)$. Этот интеграл бу-

дет обладать свойствами 5 и 6 и, кроме того, свойствами:

8) если $f_n(t, u) \rightarrow f(t, u)$ по вероятности почти для всех t и u и существует $\varphi(t, u) \in \overline{M}_p^{(2)}(F_t)$, такая, что $|f_n(t, u)| \leq |\varphi(t, u)|$, тогда

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_n(t, u) p(dt \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du)$$

по вероятности при $n \rightarrow \infty$;

9) если $f(t, u)$ отлично от нуля лишь на множестве A из алгебры \mathbf{B} , то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f(t, u) p(dt \times du) \right| > 0 \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \{ p(A) > 0 \} = 1 - e^{-\int_A \frac{du dt}{|u|^{m+1}}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Обозначим через $\overline{M}_p(F_t)$ совокупность функций $f(t, u)$, принадлежащих $\overline{M}(F_t)$, таких, что для каждого $N > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T \int_{|u| < N} |f(t, u)| \frac{du dt}{|u|^{m+1}} < \infty \right\} = 1.$$

Если $f(t, u) \in \overline{M}_p(F_t)$, то $f_N(t, u) = f(t, u)g_N(u)$ принадлежит $\overline{M}_p^{(2)}(F_t)$, и имеет смысл

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) p(dt \times du).$$

Так как при $N < N'$, на основании (4.17)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) p(dt \times du) - \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_{N'}(t, u) p(dt \times du) \right| > \right. \\ & \left. > 0 \right\} \leq 1 - \exp \left\{ - \int_{t_0}^T \int_{|u| > N} \frac{du dt}{|u|^{m+1}} \right\}, \end{aligned}$$

то при $N \rightarrow \infty$ последовательность случайных величин

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} f_N(t, u) p(dt \times du)$$

сходится по вероятности к некоторой случайной величине. Таким образом, мы распространяем определение интеграла по мере P на все функции из $\overline{M}_p(F_t)$.

Для этого интеграла будут выполняться свойства 5, 6, 9 и 8 даже в том случае, когда $\varphi(t, u) \in \overline{M}_p(F_t)$.

Интегралы

$$\int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) p(ds \times du) \text{ и } \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) q(ds \times du)$$

можно рассматривать как функции верхнего предела. Эти функции будут обладать свойствами:

10) если $f(t, u) \in \overline{M}_q^{(1)}(F_t)$, то

$$\int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) q(ds \times du)$$

является мартингалом по t , причём

$$\begin{aligned} M \left(\int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} f(s, u) q(ds \times du) / F_t \right) &= 0, \\ M \left(\left| \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} f(s, u) q(ds \times du) \right|^2 / F_t \right) &= \\ &= M \left(\int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} |f(s, u)|^2 \frac{ds du}{|u|^{m+1}} / F_t \right); \end{aligned}$$

11) интегралы

$$\int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) p(ds \times du) \text{ и } \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) q(ds \times du)$$

как функция t с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода; если при некотором $\varepsilon > 0$ $f(t, u) = 0$ для $|u| \leq \varepsilon$, то

$\int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, u) p(ds \times du)$ с вероятностью 1 является кусочно-постоянной функцией; т. е. при некотором разбиении $[t_0, T]: t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ эта функция постоянна на каждом из интервалов $[t_i, t_{i+1}]$ (точки t_1, \dots, t_{n-1} являются случайными);

12) если $\chi(t)$ удовлетворяет условию 6. то

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t \int_{R(m)} \dot{f}(s, u) q(ds \times du) \right| \leq \\ & \leq \chi(T) \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t \int_{R(m)} \dot{f}(s, u) q(ds \times du) \right|, \\ & \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^T \int_{R(m)} \dot{f}(s, u) p(ds \times du) \right| \leq \\ & \leq \chi(T) \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t \int_{R(m)} \dot{f}(s, u) p(ds \times du) \right|; \end{aligned}$$

13) если $\dot{f}(t, u)$ отлична от нуля лишь при $(t, u) \in A$, то

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_t \left| \int_{t_0}^t \int_{R(m)} \dot{f}(s, u) p(ds \times du) \right| > \right. \\ & \left. > 0 \right\} \leq 1 - \exp \left\{ - \int_A \frac{dt du}{|u|^{m+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Глава 3. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Вид стохастических уравнений для марковских процессов

Первым общим методом, примененным к изучению марковских процессов, был метод дифференциальных уравнений для переходных вероятностных функций процесса, предложенный А. Н. Колмогоровым. Этот аналитический метод позволяет вычислять вероятности некоторых событий, связанных с поведением процесса на конечном промежутке времени, если известны инфинитезимальные характеристики процесса, определяющие вероятности перехода за бесконечно малый промежуток времени. Таким образом, при аналитическом подходе мы всегда имеем дело не с самим процессом, как случайной функцией времени, а лишь с его переходной вероятностной функцией.

Более прямой метод изучения марковских процессов базируется на предварительном построении самого процесса на основании простых процессов, легко поддающихся изучению. Аппаратом для такого построения может служить теория стохастических уравнений для самих процессов.

В этой главе рассматриваются стохастические уравнения для марковских процессов, устанавливаются теоремы существования и единственности для этих уравнений, изучается зависимость решений уравнений от начальных данных и на основании этого изучения выводятся обычные интегро-дифференциальные уравнения для некоторых условных математических ожиданий, знание которых дает возможность определить переходную вероятностную функцию.

Рассмотрим построение стохастических уравнений для различных классов марковских процессов.

Пусть имеется непрерывный с вероятностью 1 марковский процесс $\xi(t)$, принимающий значения из $R^{(m)}$. Если для переходной функции этого процесса $P(t, x, t_1, A)$ выполняются условия

1) для каждого $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| > \delta} \mathbf{P}(t, x, t + \Delta t, dy) = 0,$$

2) при некотором $\delta > 0$ для всех x и t существует предел

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| < \delta} (y - x) \mathbf{P}(t, x, t + \Delta t, dy),$$

3) для всех t и x существует линейное симметричное неотрицательное преобразование в $R^{(m)} - A(t, x)$ такое, что для всех $\delta > 0$ $z \in R^{(m)}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| < \delta} (y - x, z)^2 \mathbf{P}(t, x, t + \Delta t, dy) = (A(t, x)z, z),$$

тогда процесс $\xi(t)$ называется диффузионным процессом, вектор $a(t, x)$ называется вектором переноса, а оператор $A(t, x)$ — оператором диффузии (в одномерном случае $a(t, x)$ и $A(t, x)$ будут числовыми функциями, причём $A(t, x) \geq 0$, тогда $A(t, x)$ называется коэффициентом диффузии, а $a(t, x)$ — коэффициентом переноса).

Если $\xi(t)$ обладает только что перечисленными свойствами, то приращение $\xi(t)$ и $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$, каково бы ни было $\xi(t)$, будет иметь такие же условные урезанные моменты первых двух порядков, как и величина

$$a(t, \xi(t))\Delta t + \sum_{k=1}^l b_k(t, \xi(t))[\omega_k(t + \Delta t) - \omega(t)], \quad (1.1)$$

где $b_k(t, x) = \sqrt{\lambda_k(t, x)} e_k(t, x)$, $e_k(t, x)$ — собственные векторы оператора $A(t, x)$, отвечающие ненулевым собственным значениям $\lambda_k(t, x)$, а $\omega_k(t)$ — независимые в совокупности процессы броуновского движения. Так как старшие урезанные моменты $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ и величины (1.1) будут иметь порядок $o(\Delta t)$ и для всякого $\delta > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \left| a(t, \xi(t))\Delta t + \sum_{k=1}^l b_k(t, \xi(t)) [\omega_k(t + \Delta t) - \omega_k(t)] \right| > \delta / \xi(t) \right\} = o(\Delta t),$$

то распределения $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ и (1.1) совпадают с точностью до $o(\Delta t)$. Поэтому естественно ожидать, что при переходе к дифференциалам получим точное совпадение распре-

лений. Это соображение приводит к такому стохастическому дифференциальному уравнению для диффузионного процесса

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sum_{k=1}^l b_k(t, \xi(t))dw_k(t), \quad (1.2)$$

которое, как и обычное дифференциальное уравнение, должно решаться при некоторых начальных данных. Уравнение (1.2) можно записать в следующей интегральной форме: если начальное условие задается в точке t_0 и уравнение решается при $t \geq t_0$, то

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s))ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi(s))dw_k(s). \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь чисто разрывные марковские процессы. Предположим сначала, что $\xi(t)$ может иметь скачки только размера h ; а переходная вероятностная функция удовлетворяет следующему условию: существует такая функция $\lambda(t, x)$, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{P}(t, x, t + \Delta t, \{x\}) - 1) = -\lambda(t, x),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(t, x, t + \Delta t, \{x + h\}) = \lambda(t, x),$$

(здесь $\{y\}$ обозначает множество, состоящее из одной точки y). Пусть $p(A)$ случайная мера, определенная в § 4 гл. 2, пространство $R^{(m)}$ будем считать совпадающим с вещественной прямой ($m = 1$). Тогда, если $\Delta_{x,t}$ произвольный интервал прямой, для которого

$$\int_{\Delta_{x,t}} \frac{du}{u^2} = \lambda(t, x),$$

то величины $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ и $h p([t, t + \Delta t] \times \Delta_{\xi(t), t})$ имеют с точностью до $o(\Delta t)$ совпадающие условные распределения при фиксированном $\xi(t)$. Положим $f(t, x, u) = h$ при $u \in \Delta_{x,t}$ и $f(t, x, u) = 0$ при $u \notin \Delta_{x,t}$; тогда

$$h p([t, t + \Delta t] \times \Delta_{\xi(t), t}) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{R^{(1)}} f(t, \xi(t), u) p(dt \times du).$$

Естественно ожидать точное совпадение распределений $d\xi(t)$ и величины

$$\int_{u \in R^{(1)}} f(t, \xi(t), u) p(dt \times du).$$

Поэтому для данного процесса будут рассматриваться стохастические уравнения вида

$$d\xi(t) = \int_{u \in R^{(1)}} f(t, \xi(t), u) p(dt \times du). \quad (1.4)$$

Если начальное условие задается в точке t_0 , а уравнение решается при $t_0 \leq t$, то (1.4) можно записать в интегральной форме

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, \xi(s), u) p(ds \times du). \quad (1.5)$$

Если функция $f(t, x, u)$ будет принимать значения $h_1, h_2, \dots, \dots, h_k, 0$, то уравнение (1.5) может служить для определения чисто разрывных процессов со скачками размеров h_1, h_2, \dots, h_k . Рассматривая уравнение (1.5) с функцией $f(t, x, u)$, принимающей непрерывное множество значений, получим стохастическое уравнение для марковских процессов со скачками произвольных размеров. В дальнейшем уравнения вида (1.5) будут рассматриваться с функциями $f(t, x, u)$, ограниченными в каждой ограниченной области изменения u . Тогда для существования интеграла в правой части (1.5) необходимо, чтобы

$$\int_{|u| < C} |f(t, x, u)| \frac{du}{|u|^2} < \infty.$$

Перепишем уравнение (1.5) в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} f(s, \xi(s), u) \frac{ds du}{u^2} + \\ + \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} f(s, \xi(s), u) q(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} f(s, \xi(s), u) p(ds \times du) \end{aligned}$$

и обозначим

$$\int_{|u| < 1} f(s, x, u) \frac{du}{u^2} = a(s, x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s)) ds + \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} f(s, \xi(s), u) q(ds \times du) + \\ + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} f(s, \xi(s), u) p(ds \times du). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В таком виде уравнение имеет смысл уже для тех $f(t, x, u)$, для которых

$$\int_{|u| < 1} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^2} < \infty,$$

т.е. для более широкого класса функций $f(t, x, u)$. Уравнение (1.6) можно использовать и для определения марковских процессов в $R^{(m)}$, в таком случае $a(t, x)$ и $f(t, x, u)$ также должны принимать значения из $R^{(m)}$, а меру p естественно рассматривать на $[t_0, T] \times R^{(m)}$.

Самое общее стохастическое уравнение для марковских процессов получим, объединив уравнения (1.3) и (1.6). В таком случае можно получить процессы, у которых на непрерывную диффузионную компоненту накладываются скачки. Это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi(s)) d\omega_k(s) + \\ + \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} f(s, \xi(s), u) q(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} f(s, \xi(s), u) p(ds \times du). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Кроме таких уравнений, мы будем рассматривать более узкий класс уравнений, для которых

$$\int |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty.$$

Тогда уравнение (1.7) удобнее записывать в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi(s)) d\omega_k(s) + \\ + \int_{t_0}^t s f(s, \xi(s), u) q(ds \times du). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Эти уравнения и будут изучаться в этой главе.

§ 2. Существование и единственность решения стохастических уравнений

В этом параграфе рассмотрим стохастические уравнения более общего вида, по сравнению с уравнениями, полученными в предыдущем параграфе. Такие уравнения будут использовать-

ся при изучении зависимости решений стохастических уравнений от начальных данных.

Предположим, что для всех $t \in [t_0, T]$ определена σ -алгебра F_t , причём для $t_1 < t_2$ $F_{t_1} \subset F_{t_2}$, на отрезке $[t_0, T]$ определены l независимых между собой процессов броуновского движения $w_1(t), w_2(t), \dots, w_l(t)$, а на $[t_0, T] \times R^{(m)}$ определены меры p и q , не зависящие от $w_k(t)$ и обладающие свойствами, указанными в § 4 гл. 2. Пусть, далее, каково бы ни было $t_1 \in [t_0, T]$, случайные величины $w_1(t_1), \dots, w_l(t_1), p(\Delta \times A)$, где $\Delta [t_0, t_1]$, $A \subset R^{(m)}$, измеримы относительно F_{t_1} , а при $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ величины $w_1(t_2) - w_1(t_1), \dots, w_1(t_r) - w_1(t_{r-1}), \dots, w_l(t_2) - w_l(t_1), \dots, w_l(t_r) - w_l(t_{r-1}), p([t_1, t_2] \times A_j), \dots, p([t_{r-1}, t_r] \times A_j), j = 1, 2, \dots, k$, где A_1, A_2, \dots, A_k произвольные борелевские множества из $R^{(m)}$, для которых соответствующие величины имеют смысл, в совокупности не зависят от каждого из событий σ -алгебры F_{t_1} .

Пусть функции $\varphi(t), A(t, x), B_1(t, x), \dots, B_l(t, x), F(t, x, u)$ при каждом $t \in [t_0, T], x \in R^{(m)}, u \in R^{(m)}$ измеримы относительно F_t и являются измеримыми по совокупности всех своих переменных (включая «случайную» переменную ω).

Будем рассматривать уравнение

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \varphi(t) + \int_{t_0}^t A(s, \xi(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t B_k(s, \xi(s)) dw_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} F(s, \xi(s), u) q(ds \times du). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Теорема I. Если выполняются условия:

$$1) \int_{t_0}^T M |\varphi(t)|^2 dt < \infty,$$

2) существует такое $L > 0$, что для всех x и y из $R^{(m)}$ и $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} (T - t_0) |A(t, x) - A(t, y)|^2 + \sum_{k=1}^l |B_k(t, x) - B_k(t, y)|^2 + \\ + \int_{R^{(m)}} |F(t, x, u) - F(t, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L^2 |x - y|^2, \end{aligned}$$

то уравнение (2.1) имеет решение $\xi(t)$, удовлетворяющее условиям:

а) $\xi(t)$ измеримо относительно F_t и б) $\int_{t_0}^T M |\xi(t)|^2 dt < \infty$,

причём это решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности, т. е. каждые два решения (2.1), удовлетворяющие условиям а) и б), стохастически эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим линейное нормированное пространство Ξ процессов $\xi(t)$, удовлетворяющих условиям а) и б) теоремы; при этом будем полагать, что

$$\|\xi(t)\|^2 = \int_{t_0}^T M |\xi(t)|^2 dt.$$

Определим в Ξ отображение S :

$$\begin{aligned} S\xi(t) = & \varphi(t) + \int_{t_0}^t A(s, \xi(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t B_k(s, \xi(s)) dw_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} F(s, \xi(s), u) q(ds \times du). \end{aligned}$$

Покажем, что оператор S^n является сжимающим при достаточно больших n :

$$\begin{aligned} S\xi_1(t) - S\xi_2(t) = & \int_{t_0}^t [A(s, \xi_1(s)) - A(s, \xi_2(s))] ds + \\ & + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t [B_k(s, \xi_1(s)) - B_k(s, \xi_2(s))] dw_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} [F(s, \xi_1(s), u) - F(s, \xi_2(s), u)] q(ds \times du). \end{aligned}$$

Используя неравенство $\left(\sum_1^n Q_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n Q_k^2$ и формулы

(1.6) и (4.8) из гл. 2, получаем:

$$M |S\xi_1(t) - S\xi_2(t)|^2 \leq (l+2) \left[(t - t_0) \int_{t_0}^t M |A(s, \xi_1(s)) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - A(s, \xi_2(s))|^2 ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t M |B_k(s, \xi_1(s)) - B_k(s, \xi_2(s))|^2 ds + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} M |F(s, \xi_1(s), u) - F(s, \xi_2(s), u)|^2 \frac{ds du}{|u|^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание условие 2) теоремы, можем записать:

$$M |S \xi_1(t) - S \xi_2(t)|^2 \leq C \int_{t_0}^t M |\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2 ds, \quad (2.2)$$

где $C = (l+2)L^2$. Из (2.2) легко получаем неравенство:

$$\begin{aligned}
M |S^n \xi_1(t) - S^n \xi_2(t)|^2 & \leq C^n \int_{t_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = T} M |\xi_1(s_1) - \xi_2(s_1)|^2 ds_1 \dots ds_n \leq \\
& \leq C^n \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|,
\end{aligned}$$

откуда

$$\|S^n \xi_1(t) - S^n \xi_2(t)\| \leq \frac{C^n (T-t_0)^n}{n!} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|. \quad (2.3)$$

Поэтому для достаточно больших n_0 S^{n_0} будет действительно сжимающим оператором. Пусть $\bar{\xi}(t)$ — неподвижная точка S^{n_0} . Так как такая точка единственна, то S имеет также не более одной неподвижной точки. Покажем, что $\bar{\xi}(t)$ будет также неподвижной точкой S . Из (2.3) и соотношения $S^{kn_0} \bar{\xi}(t) = \bar{\xi}(t)$ вытекает справедливость для всех k неравенства

$$\begin{aligned}
\|\bar{\xi}(t) - S \bar{\xi}(t)\| & = \|S^{kn_0} \bar{\xi}(t) - S^{kn_0+1} \bar{\xi}(t)\| \leq \\
& \leq \frac{C^{kn} (T-t_0)^{kn_0}}{(kn_0)!} \|\bar{\xi}(t) - S \bar{\xi}(t)\|.
\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем: $\|\bar{\xi}(t) - S \bar{\xi}(t)\| = 0$. Единственная неподвижная точка отображения S и будет единственным с точностью до стохастической непрерывности (последнее вытекает из (2.2) решением уравнения (2.1). Теорема доказана.

Замечание. Если $\varphi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, то и $\xi(t)$ не имеет разрывов второго рода, так как интегралы в правой части (2.1) не имеют разрывов второго рода (см. теорему 3 из § 2 и свойство 10 из § 4 главы 2). Поэтому всякие два решения уравнения (2.1) в этом случае будут с вероятностью 1 совпадать во всех точках непрерывности, так

как они с вероятностью 1 совпадают на любом счётном множестве.

Следующая теорема устанавливает локальную зависимость решения уравнения (2.1) от коэффициентов $A(t, x)$, $B_k(t, x)$, $F(t, x, u)$ как функций x .

Теорема 2. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \varphi_i(t) + \int_{t_0}^t A_i(s, \xi_i(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t B_k^{(i)}(s, \xi_i(s)) d\omega_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} F_i(s, \xi_i(s), u) q(ds \times du), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\varphi_i(t)$ не имеют разрывов второго рода и все коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть, далее, $\psi(t)$ не возрастающая функция, принимающая лишь значения 1 и 0 и при каждом t измеримая относительно F_t такая, что с вероятностью 1 выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \psi(t) (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) &= 0, \quad \psi(t) [A_1(t, \xi_1(t)) - A_2(t, \xi_1(t))] = 0, \\ \psi(t) [B_k^{(1)}(t, \xi_1(t)) - B_k^{(2)}(t, \xi_1(t))] &= 0, \\ \psi(t) [F_1(t, \xi_1(t), u) - F_2(t, \xi_1(t), u)] &= 0. \end{aligned}$$

Тогда с вероятностью 1 $\psi(t) \xi_1(t) = \psi(t) \xi_2(t)$ при всех t , являющихся точками непрерывности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Доказательство. Легко установить, что

$$\begin{aligned} & \left| \psi(t) \int_{t_0}^t [A_1(s, \xi_1(s)) - A_2(s, \xi_1(s))] ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t \psi(s) [A_1(s, \xi_1(s)) - A_2(s, \xi_1(s))] ds \right| = 0. \end{aligned}$$

Точно так же, используя свойство 2 из § 1 и свойство 2 из § 4 гл. 2, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \psi(t) \int_{t_0}^t [B_k^{(1)}(s, \xi_1(s)) - B_k^{(2)}(s, \xi_2(s))] d\omega_k(s) &= 0, \\ \psi(s) \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} [F_1(s, \xi_1(s), u) - F_2(s, \xi_1(s), u)] q(ds \times du) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \psi(t) [\xi_1(t) - \xi_2(t)] = & \psi(t) \int_{t_0}^t [A_2(s, \xi_1(s)) - A_2(s, \xi_2(s))] ds + \\ & + \sum_{k=1}^l \psi(t) \int_{t_0}^t [B_k^{(2)}(s, \xi_1(s)) - B_k^{(2)}(s, \xi_2(s))] dw_k(s) + \\ & + \psi(t) \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} [F_2(s, \xi_1(s), u) - F_2(s, \xi_2(s), u)] q(ds \times du). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Из этого соотношения точно таким же образом, как при доказательстве теоремы 1, получаем неравенство

$$M \psi(t) |\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \leq C \int_{t_0}^t M \psi(s) |\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2 ds.$$

Подставляя левую часть последнего неравенства в правую и повторяя такую операцию n раз, получаем неравенство

$$M \psi(t) |\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \leq \frac{C^n}{n!} \int_{t_0}^t M \psi(s) |\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2 ds,$$

из которого, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая замечание к предыдущей теореме, и получаем доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть при $x \in G$, где G — некоторое открытое множество в $R^{(n)}$, $A_1(t, x) = A_2(t, x)$, $B_k^{(1)}(t, x) = B_k^{(2)}(t, x)$, $k=1, \dots, l$, $F_1(t, x, u) = F_2(t, x, u)$. Обозначим через τ такой момент времени, что при $t < \tau$ $\xi_1(t) \in G$, $\xi_2(t) \in G$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Тогда с вероятностью 1 $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ при $t < \tau$ для всех t , являющихся точками непрерывности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Следствие 2. Пусть $\xi(t)$ решение уравнения (2.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 1. Положим $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$, $g_N(x) = N + 1 - |x|$ при $N < |x| \leq N + 1$, $g_N(x) = 0$ при $|x| > N + 1$;

$$A_N(t, x) = g_N(x) A(t, x); \quad B_k^{(N)}(t, x) = g_N(x) B_k(t, x);$$

$$F_N(t, x, u) = g_N(x) F(t, x, u). \quad (2.6)$$

Если $\xi_N(t)$ решение уравнения (2.1), в которое вместо $A(t, x)$, $B_k(t, x)$, $F(t, x, u)$ подставлены $A_N(t, x)$, $B_k^{(N)}(t, x)$, $F_N(t, x, u)$, то с вероятностью 1 для всех $\xi(t)$, для которых $\sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \leq N$,

$\xi(t)$ и $\xi_N(t)$ совпадают с вероятностью 1 во всех точках непрерывности обеих функций. Таким образом, в том случае, когда $\varphi(t)$ ограничено с вероятностью 1, пренебрегая ω -множеством сколь угодно малой вероятности, можно считать, что $\xi(t)$ является решением уравнения вида (2.1), коэффициенты которого отличны от нуля только в некоторой ограниченной области изменения x .

Следствие 3. Обозначим через $\psi(t)$ функцию, равную нулю, если $p([t_0, T] \times \{|u| > N\}) > 0$, и $\psi(t) = 1$, если $p([t_0, T] \times \{|u| > N\}) = 0$. Такая функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, если $\bar{F}_N(t, x, u) = g_N(u)F(t, x, u)$ и $\bar{\xi}_N(t)$ — решение уравнения (2.1), в которое вместо $F(t, x, u)$ подставлено $\bar{F}_N(t, x, u)$, то для всех $t \in [t_0, T]$ $P\{\psi(t)(\xi(t) - \bar{\xi}_N(t)) = 0\} = 1$. Так как выбором достаточно большого N можно сделать $P\{\psi(T) = 1\}$ сколь угодно близкой к 1, то, пренебрегая ω -множеством сколь угодно малой вероятности, можем считать, что $\xi(t)$ является решением уравнения вида (2.1), у которого $F(t, x, u)$ отлично от нуля только в некоторой ограниченной области изменения u .

Теорема 3. Предположим, что коэффициенты $A(s, x)$, $B_1(s, x)$, ..., $B_l(s, x)$, $F(s, x, u)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) для всякого C существует такое L_C , что

$$(T - t_0)|A(s, x) - A(s, y)|^2 + \sum_1^l |B_k(s, x) - B_k(s, y)|^2 + \\ + \int_{u \in R^{(m)}} |F(s, x, u) - F(s, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L_C^2 |x - y|^2$$

как только $|x| \leq C$, $|y| \leq C$;

2) существует такое K , при котором

$$(T - t_0)|A(s, x)|^2 + \sum_1^l |B_k(s, x)|^2 + \int_{u \in R^{(m)}} |F(s, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m-1}} \leq \\ \leq K(|x|^2 + 1);$$

3) $\varphi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода.

Тогда уравнение (2.1) имеет с вероятностью 1 ограниченное решение, единственное с точностью до стохастической эквивалентности.

Доказательство единственности. Пусть решением (2.1) будут $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, причём с вероятностью 1 они ограничены. Положим $\psi(t) = 1$, если $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\xi_1(s)| \leq N$ и $\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\xi_2(s)| \leq N$; в противном случае полагаем $\psi(t) = 0$. Так как $\psi(t)$ удовлетво-

ряет условиям теоремы 2, то можем записать для $\psi(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]$ формулу (2.5). Учитывая, что на основании условия 1

$$\begin{aligned} [T - t_0] \psi(t) |A(t, \xi_1(t)) - A(t, \xi_2(t))|^2 + \sum_{k=1}^l \psi(t) |B_k(t, \xi_1(t)) - \\ - B_k(t, \xi_2(t))|^2 + \psi(t) \int_{u \in R^{(m)}} |F(t, \xi_1(t), u) - F(t, \xi_2(t), u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \\ \leq L_N^2 |\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \psi(t), \end{aligned}$$

из формулы (2.5) получаем неравенство

$$M \psi(t) |\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \leq C \int_{t_0}^t M \psi(s) |\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2 ds,$$

из которого, как и в теореме 2, получаем

$$M \psi(t) |\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 = 0.$$

Из последнего неравенства вытекает

$$P\{\psi(t) |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = 1.$$

Так как $\psi(t)$ в связи с ограниченностью $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с вероятностью 1 стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим доказательство единственности.

Доказательство существования. Пусть $A_N(s, x)$, $B_1^{(N)}(s, x)$, ..., $B_l^{(N)}(s, x)$, $F_N(s, x, u)$ определены соотношениями (2.6), $\varphi_N(t) = g_N(\varphi(t))\varphi(t)$. Обозначим через $\xi_N(t)$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \xi_N(t) = \varphi_N(t) + \int_{t_0}^t A_N(s, \xi_N(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t B_k^{(N)}(s, \xi_N(s)) dw_k(s) + \\ + \int_{t_0}^t \int_{u \in R^{(m)}} F_N(s, \xi_N(s), u) q(ds \times du). \quad \xi_N(t) \quad (2.7) \end{aligned}$$

Из следствия 1 предыдущей теоремы вытекает, что при $N' > N$ $\xi_{N'}(t) = \xi_N(t)$ для всех точек t , в которых $\xi_{N'}(t)$ и $\xi_N(t)$ непрерывны, если только $\sup_t |\xi_{N'}(t)| < N$ и $\sup_t |\xi_N(t)| < N$. Будем считать, что $\varphi(t)$ непрерывны справа и решения $\xi_{N'}(t)$ будут рассматриваться также непрерывно справа. Из того, что $\xi_N(t) = \xi_{N'}(t)$ для почти всех t , если только $\sup_t |\xi_N(t)| < N$, $\sup_t |\xi_{N'}(t)| < N$, вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_{N'}(t) - \xi_N(t)| > 0 \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_{N'}(t)| \geq N \right\} + \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_N(t)| \geq N \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Покажем, что $\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_N(t)| > C \right\} \rightarrow 0$ равномерно относительно N при $C \rightarrow \infty$. Взяв какое-нибудь N_0 , заметим, что если $\bar{\xi}_N(t)$ является решением уравнения (2.7), в которое вместо $\varphi_N(t)$ подставлено $\varphi_{N_0}(t)$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_N(t) - \bar{\xi}_N(t)| > 0 \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi(t)| > N_0 \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_N(t)| > C \right\} & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)| > \varepsilon \right\} + \\ & + \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi(t)| > N_0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Так как

$$\begin{aligned} |\bar{\xi}_N(t)|^2 & \leq (l+3) \left[|\varphi_{N_0}(t)|^2 + (t-t_0) \int_{t_0}^t |A_N(s, \bar{\xi}_N(s))|^2 ds + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^l \left(\int_{t_0}^t B_k^{(N)}(s, \bar{\xi}_N(s)) dw_k(s) \right)^2 + \left(\int_{t_0}^t \int_{u \in R^{(m)}} F_N(s, \bar{\xi}_N(s), u) q(ds \times du) \right)^2 \right], \end{aligned}$$

то, учитывая условие 2, получим

$$\mathbf{M} |\bar{\xi}_N(t)|^2 \leq \left(\mathbf{M} |\varphi_{N_0}(t)|^2 + K \int_{t_0}^t \mathbf{M} |\bar{\xi}_N(s)|^2 ds \right) (l+3).$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\mathbf{M} |\bar{\xi}_N(t)|^2 \leq (l+3) \mathbf{M} (\sup_t |\varphi_{N_0}(t)|^2) e^{(l+3)K(t+t_0)}.$$

И далее,

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)| & \leq \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi_{N_0}(t)| + \int_{t_0}^T |A_N(s, \bar{\xi}_N(s))| ds + \\ & + \sum_{k=1}^l \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t B_k^{(N)}(s, \bar{\xi}_N(s)) dw_k(s) \right| + \end{aligned}$$

$$+ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t \int_{u \in R^{(m)}} F(s, \bar{\xi}_N(s), u) q(ds \times du) \right|.$$

Так как стохастические интегралы как функции верхнего предела являются мартингалами, а для мартингалов имеет место свойство 5 из § 5 гл. 1 (применяя это свойство с $\alpha = 2$), получим:

$$\begin{aligned} M \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)|^2 &\leq (l+3) \left[M \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi_{N_0}(t)|^2 + \right. \\ &+ (T-t_0) \int_{t_0}^T M |A_N(s, \bar{\xi}_N(s))|^2 ds + 4 \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^T |B_k^{(N)}(s, \bar{\xi}_N(s))|^2 ds + \\ &+ 4 \int_{t_0}^T \int_{u \in R^{(m)}} |F(s, \bar{\xi}_N(s), u)|^2 \frac{ds du}{|u|^{m+1}} \leq \\ &\leq (l+3)(N_0+1)^2 + 4K \int_{t_0}^T M |\bar{\xi}_N(s)|^2 ds \leq \\ &\leq (l+3)(N_0+1)^2 [1 + 4K(T-t_0)e^{(l+3)K(T-t_0)}]. \end{aligned}$$

Таким образом существует постоянная H , зависящая лишь от $K, l, (T-t_0)$, такая, что

$$M \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)|^2 \leq H M \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi_{N_0}(t)|^2. \quad (2.10)$$

Из (2.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)| > C \right\} &\leq \frac{H}{C^2} M \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi_{N_0}(t)|^2 \right) + \\ &+ P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi(t)| > N_0 \right\}. \end{aligned}$$

Взяв от обеих частей последнего неравенства \sup_N , а затем переходя к пределу при $C \rightarrow \infty$ и $N_0 \rightarrow \infty$, получим:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_N P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)| > C \right\} = 0.$$

Выберем такую возрастающую последовательность N_k , чтобы

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\bar{\xi}_N(t)| > N_k \right\} \leq \frac{1}{k^2}$$

при $N > N_k$. Тогда из (2.8) вытекает, что

$$P \left\{ \sup_{t_0 < t < T} |\xi_{N_k}(t) - \xi_{N_{k+1}}(t)| > 0 \right\} \leq \frac{2}{k^2}.$$

На основании леммы Бореля — Кантелли из последовательности событий $\left\{ \sup_{t_0 < t < T} |\xi_{N_k}(t) - \xi_{N_{k+1}}(t)| > 0 \right\}$ происходит с вероятностью 1 только конечное число событий, и поэтому, начиная с некоторого номера, все $\xi_{N_k}(t)$ равны между собой. Следовательно, $\xi_{N_k}(t)$ с вероятностью 1 равномерно сходятся к некоторому процессу $\xi(t)$. Процесс $\xi(t)$ также не будет иметь разрывов второго рода с вероятностью 1. Заметим, далее, что в случае, когда $\sup_{t_0 < t < T} |\xi_{N_k}(t)| < N_k$, то $\xi(t) = \xi_{N_k}(t)$, а когда $\sup_{t_0 < t < T} |\xi_{N_k}(t)| \geq N_k$, то $\sup_{t_0 < t < T} |\xi(t)| \geq N_k$. Так как $|\xi_{N_k}(t)| \leq N_k + 1$, то с вероятностью 1 имеет место неравенство

$$\sup_{t_0 < t < T} |\xi_{N_k}(t)| \leq \sup_{t_0 < t < T} |\xi(t)| + 1. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.7) вместо $N - N_k$ и переходя к пределу при $N_k \rightarrow \infty$ (предельный переход под знаками стохастических интегралов возможен в связи с (2.11), условия 2 теоремы и свойств 5 из § 1 и 4 из § 4 гл. 2) убеждаемся, что $\xi(t)$ является решением уравнения (2.1). Таким образом, существование решения также доказано.

Замечание 1. Если $M \sup_{t_0 < t < T} |\varphi(t)|^2 < \infty$, то, переходя в (2.10) к пределу при $N_0 \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$, получаем, что существует H , зависящее лишь от $K, l, T - t_0$, такое, что

$$M \left(\sup_{t_0 < t < T} |\xi(t)|^2 \right) \leq H M \left(\sup_{t_0 < t < T} |\varphi(t)|^2 \right), \quad (2.12)$$

поэтому и

$$\sup_{t_0 < t < T} M |\xi(t)|^2 \leq H M \left(\sup_{t_0 < t < T} |\varphi(t)|^2 \right). \quad (2.13)$$

Замечание 2. В условиях предыдущего замечания существует такое H_1 , что

$$M \sup_{t_1 < t_2 < t_1 + h} |\xi(t_2) - \varphi(t_2) - \xi(t_1) + \varphi(t_1)|^2 \leq H_1 M \sup_{t_0 < t < T} |\varphi(t)|^2 h. \quad (2.14)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} M \sup_{t_1 < t_2 < t_1 + h} |\xi(t_2) - \varphi(t_2) - \xi(t_1) + \varphi(t_1)|^2 &\leq \\ &\leq (l+2) \left[h \int_{t_1}^{t_1+h} M |A(s, \xi(s))|^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^l M \sup_{t_1 < t_2 < t_1 + h} \left| \int_{t_1}^{t_2} B_k(s, \xi(s)) dw_k(s) \right|^2 + \right] \end{aligned}$$

$$+ M \sup_{t_1 < t_2 < t_1+h} \left| \int_{t_1}^{t_1+h} \int_{u \in R^{(m)}} F(s, \xi_1(s), u) q(ds \times du) \right|^2 \Big].$$

Используя свойство 5 мартингалов из § 5 гл. 1, получим

$$\begin{aligned} & M \sup_{t_1 < t_2 < t_1+h} |\xi(t_2) - \varphi(t_2) - \xi(t_1) + \varphi(t_1)|^2 \leq \\ & \leq (l+2) K \int_{t_1}^{t_1+h} M |\xi(t)|^2 dt \leq HK(l+2) M \sup_{t_0 < t \leq T} |\varphi(t)|^2 \cdot h, \end{aligned}$$

ввиду (2.13). Полагая $H_1 = HK(l+2)$, получаем (2.14). Из (2.14) вытекает, в частности, что $\xi(t)$ будет непрерывно по вероятности, если только $\varphi(t)$ непрерывно по вероятности.

Из теоремы 3 вытекает теорема 4.

Теорема 4. Пусть $\xi(t_0)$ не зависит от меры q и процессов $w_k(t)$, а $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $f(t, x, u)$ определены при $t \in [t_0, T]$, $x \in R^{(m)}$, $u \in R^{(m)}$, измеримы по совокупности переменных и удовлетворяют условиям:

1) для каждого $C > 0$ существует L_C такое, что

$$\begin{aligned} & (T - t_0) |a(t, x) - a(t, y)|^2 + \sum_{k=1}^l |b_k(t, x) - b_k(t, y)|^2 + \\ & + \int_{u \in R^{(m)}} |f(t, x, u) - f(t, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L_C^2 |x - y|^2, \end{aligned}$$

если $|x| \leq C$ и $|y| \leq C$;

2) существует такое K , при котором

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^l |b_k(t, x)|^2 + \int_{u \in R^{(m)}} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K(|x|^2 + 1).$$

В таком случае уравнение (1.8) имеет решение, не имеющее разрывов второго рода с вероятностью 1, причём всякие два решения (1.8) с вероятностью 1 совпадают во всех точках t , являющихся точками непрерывности обоих процессов.

Для доказательства теоремы заметим, что существование решения вытекает из теоремы 3; то, что это решение не будет иметь разрывов второго рода с вероятностью 1, вытекает из формулы (1.8), так как стохастические интегралы в правой части (1.8) не имеют разрывов второго рода с вероятностью 1. Наконец, легко видеть, что два стохастически эквивалентных процесса, не имеющих разрывов второго рода, совпадая на любом счётном множестве с вероятностью 1, будут с вероятностью 1 совпадать и во всех точках непрерывности обоих процессов.

§ 3. Существование и единственность решения стохастических уравнений (продолжение)

В этом параграфе будут рассмотрены вопросы существования и единственности уравнения (1.7). Для изучения уравнения (1.7) нам понадобится одно свойство интегралов по мере p .

Лемма 1. Существуют случайное число ν и случайные точки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu$ на $[t_0, T]$, $u_1, u_2, \dots, u_\nu \in R^{(m)}$, удовлетворяющие условию $|u_i| > \varepsilon$, такие, что для всякой функции $\varphi(t, u)$ из $M_p(F_t)$ с вероятностью 1 выполняется равенство:

$$\int_{t_0}^T \int_{|u|>\varepsilon} \varphi(t, u) p(dt \times du) = \sum_{k=1}^{\nu} \varphi(\tau_k, u_k). \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \int_{|u|>\varepsilon} u p(ds \times du).$$

Легко видеть, что $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями, характеристическая функция которого будет

$$M e^{i(z, \xi(t))} = \exp \left\{ (t - t_0) \int_{|u|>\varepsilon} (e^{i(u, z)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}.$$

Так как процесс $\xi(t)$ не имеет разрывов второго рода и все его разрывы по абсолютной величине превосходят ε , то он будет иметь конечное число разрывов (с вероятностью 1).

Обозначим через ν число разрывов, через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu$ — моменты времени появления разрывов, через u_1, u_2, \dots, u_ν — величины разрывов ($u_k = \xi(\tau_k + 0) - \xi(\tau_k - 0)$). Тогда для каждого множества $A \subset [t_0, T] \times \{|u| > \varepsilon\}$ $p(A) = k$, где k — число точек (τ_i, u_i) , для которых $(\tau_i, u_i) \in A$. Если $\varphi(t, u)$ ступенчатая функция, т. е. существуют такие попарно не пересекающиеся множества $A_j \subset [t_0, T] \times \{|u| > \varepsilon\}$, $j = 1, \dots, N$, для которых $\bigcup_j A_j = [t_0, T] \times \{|u| > \varepsilon\}$ и $\varphi(t, u)$ постоянна на каждом из множеств A_j , то с вероятностью 1

$$\int_{t_0}^T \int_{|u|>\varepsilon} \varphi(t, u) p(dt \times du) = \sum_{j=1}^N p(A_j) \varphi(\bar{t}_j, \bar{u}_j),$$

где (\bar{t}_j, \bar{u}_j) — произвольная точка из A_j . Если $p(A_j) = k$, то в предыдущую формулу можно вместо $\varphi(\bar{t}_j, \bar{u}_j)$ подставить $\frac{1}{k} \sum_{(\tau_i, u_i) \in A_j} \varphi(\tau_i, u_i)$. После такой подстановки убеждаемся, что фор-

мула (3.1) имеет место для любой ступенчатой функции $\varphi(t, u)$.

Заметим теперь, что величины τ_k и u_k имеют ограниченную совместную плотность распределения (τ_k и u_k независимы, распределение u_k дается формулой

$$P\{u_k \in B\} = \int_{B \cap \{|u| > \varepsilon\}} \frac{du}{|u|^{m+1}} \cdot \left(\int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right)^{-1},$$

а распределение величины τ_k при условии, что $v \geq k$, — формулой:

$$P\{t_0 < \tau_k < t\} = \frac{\left[1 - \exp \left(-(t - t_0) \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right) \right]^k}{\left[1 - \exp \left(-(T - t_0) \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right) \right]}.$$

Для любой функции $\varphi(t, u)$ из $\overline{M}_p(F_t)$ можно построить последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(t, u)$ такую, что $\varphi_n(t, u) \rightarrow \varphi(t, u)$ по вероятности почти при всех (t, u) и $|\varphi_n(t, u)| \leq |\varphi(t, u)|$. Из ограниченности плотности величин (τ_k, u_k) вытекает, что $\varphi_n(\tau_k, u_k) \rightarrow \varphi(\tau_k, u_k)$ почти при всех значениях (τ_k, u_k) ; значит $\varphi_n(\tau_k, u_k) \rightarrow \varphi(\tau_k, u_k)$ по вероятности. Написав (3.1) для $\varphi_n(t, u)$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ (в левой части возможен переход к пределу под знаком интеграла ввиду условия 8 для функций из $\overline{M}_p(F_t)$, § 24, гл. 2), получим доказательство леммы.

Замечание. Точно таким же образом устанавливается, что с вероятностью 1

$$\int_{t_0}^t \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(s, u) p(ds \times du) = \sum_{\tau_i < t} \varphi(\tau_i, u_i),$$

какова бы ни была $\varphi(t, u)$ из $\overline{M}_p(F_t)$, $t \in [t_0, T]$.

Теорема о единственности решения уравнения (1.7). Если выполняются условия:

- 1) $\xi(t_0)$ не зависит от процессов $w_1(t), \dots, w_l(t)$ и мер p и q ,
- 2) для каждого $C > 0$ существует такое L_C , что при $|x| \leq C$, $|y| \leq C$ выполняется неравенство:

$$(T - t_0) |a(t, x) - a(t, y)|^2 + \sum_{k=1}^l |b_k(t, x) - b_k(t, y)|^2 + \\ + \int_{|u| < 1} \frac{|f(t, x, u) - f(t, y, u)|^2}{|u|^{m+1}} du \leq L_C |x - y|^2,$$

3) существует такое K , что

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^l |b_k(t, x)|^2 + \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K(1 + |x|^2),$$

$$4) \text{ для каждого } N > 0 \sup_{\substack{t_0 \leq t \leq T \\ |x| \leq N, |u| \leq N}} |f(t, x, u)| < \infty,$$

тогда непрерывное слева решение уравнения (1.7) единственно в том смысле, что каждые два таких решения с вероятностью 1 совпадают во всех точках.

Доказательство. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ два непрерывных слева решения (1.7). На основании предыдущей леммы можно указать такие точки (τ_1, u_1) , $(\tau_2, u_2), \dots, (\tau_v, u_v)$, что будут выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi_i(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi_i(s)) d\omega_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{|u| \leq 1} f(s, \xi_i(s), u) q(ds \times du) + \sum_{\tau_k < t} f(\tau_k, \xi_i(\tau_k), u_k). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_1(t) = \sum_{\tau_k < t} f(\tau_k, \xi_1(\tau_k), u_k) + \xi(t_0)$, а $\psi(t) = 1$ при $t \leq \tau_1$

и $\psi(t) = 0$ при $t > \tau_1$. Так как $[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\psi(t) = 0$, на основании теоремы 2 из § 2 можем утверждать, что $[\xi_1(t) - \xi_2(t)]\psi(t) = 0$. В связи с тем, что $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ при $t \leq \tau_1$, в частности, $\xi_1(\tau_1) = \xi_2(\tau_1)$, поэтому $f(\tau_1, \xi_1(\tau_1), u_1) = f(\tau_1, \xi_2(\tau_1), u_1)$. Если $\psi_1(t) = 1$ при $t \leq \tau_2$ и $\psi_1(t) = 0$ при $t > \tau_2$, то на основании предыдущего $\psi_1(t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] = 0$, и поэтому $\psi_1(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)] = 0$, т. е. $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ при $t \leq \tau_2$. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1. Теорема доказана.

Теорема о существовании решения уравнения (1.7). Эта теорема характерна тем, что на коэффициенты уравнения не накладываются условия типа условий Липшица; правда, при отсутствии таких условий нельзя гарантировать единственность решения.

Пусть выполняются условия:

- 1) $a(t, x)$, $b_1(t, x), \dots, b_l(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных при $x \in R^{(m)}$, $t \in [t_0, T]$,
- 2) каковы бы ни были $t_1 \in [t_0, T]$ и $x_1 \in R^{(m)}$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ x \rightarrow x_1}} \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u) - f(t_1, x_1, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 0,$$

3) существует такое K , что

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^l |b_k(t, x)|^2 + \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K(1 + |x|^2),$$

4) $f(t, x, u)$ ограничена в каждой ограниченной области изменения x и u и почти при всех u непрерывна по совокупности t и x . Тогда уравнение (1.7) имеет с вероятностью 1 ограниченное решение.

Доказательство существования решения будет проводиться методом конечных разностей. Этот метод оказывается полезным и при исследовании других вопросов, рассматриваемых в этой работе.

Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[t_0, T]$: $t_0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$, такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_i (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = 0$.

Определим величины $\xi_k^{(n)}$ соотношениями: $\xi_0^{(n)} = \xi(t_0)$,

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}^{(n)} = & \xi_k^{(n)} + a(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}) \Delta t_k^{(n)} + \sum_{j=1}^l b_j(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}) [\omega_j(t_{k+1}^{(n)}) - \\ & - \omega_j(t_k^{(n)})] + \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| \leq 1} f(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}, u) q(ds \times du) + \\ & + \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| > 1} f(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}, u) p(ds \times du), \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь и далее в этом параграфе $\Delta t_k^{(n)} = t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}$. Покажем, что при высказанных предположениях величины $\xi_k^{(n)}$ при $t_k^{(n)} \rightarrow t, n \rightarrow \infty$ будут в некотором смысле сходиться к решению уравнения (1.7). Для доказательства этого понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 2. Пусть существует такая постоянная K , что

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{j=1}^l |b_j(t, x)|^2 + \int_{|u| \leq 1} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K(1 + |x|^2),$$

а $f(t, x, u)$ ограничено в каждой ограниченной области изменения x и u . Тогда величины $\sup_k |\xi_k^{(n)}|$ ограничены по вероятности равномерно относительно n .

Доказательство. Положим $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$, $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$ и $\eta_0^{(n)} = g_N(\xi_0^{(n)}) \xi_0^{(n)}$.

$$\begin{aligned}
\eta_{k+1}^{(n)} = & \eta_k^{(n)} + a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) \Delta t_k^{(n)} + \sum_{j=1}^l b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) [w_j(t_{k+1}^{(n)}) - \\
& - w_j(t_k^{(n)})] + \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| < 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) + \\
& + \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| > 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) p(ds \times du), \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где $a_N(t, x) = g_N(x) a(t, x)$, $b_j^{(N)}(t, x) = g_N(x) b_j(t, x)$, $f_N(t, x, u) = g_N(x) g_N(u) f(t, x, u)$. Очевидно, что при $|\eta_k^{(n)}| > N$ $|\eta_{k+1}^{(n)}| = \eta_{k+1}^{(n)}$, при $|\eta_k^{(n)}| \leq N$,

$$\begin{aligned}
|\eta_{k+1}^{(n)}| \leq & N + |a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \Delta t_k^{(n)} + \sum_{j=1}^l |b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})| |w_j(t_{k+1}^{(n)}) - \\
& - w_j(t_k^{(n)})| + \left| \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| < 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right| + \\
& + \sup_{\substack{t, \leq t \leq T \\ |u| < N, |x| < N}} |f(t, x, u)| p([t_0, T] \times \{|u| > 1\}).
\end{aligned}$$

Поэтому при всех k справедливо неравенство:

$$\begin{aligned}
|\eta_k^{(n)}| \leq & N + \sum_{r=0}^{n-1} |a_N(t_r^{(n)}, \eta_r^{(n)})| \Delta t_r^{(n)} + \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l |b_j^{(N)}(t_r^{(n)}, \eta_r^{(n)})| (w_j(t_{r+1}^{(n)}) - w_j(t_r^{(n)})) + \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \left| \int_{t_r^{(n)}}^{t_{r+1}^{(n)}} \int_{|u| < 1} f_N(t_r^{(n)}, \eta_r^{(n)}, u) q(ds \times du) \right| + \\
& + \sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{|u| < N, |x| < N} |f(t, x, u)| p([t_0, T] \times \{|u| > 1\}).
\end{aligned}$$

Так как для каждого слагаемого в правой части существует математическое ожидание квадрата, то и $\mathbf{M} |\eta_k^{(n)}|^2 < \infty$.

Как вытекает из леммы 1, мера ρ , рассматриваемая на $[t_0, T] \times \{|u| > 1\}$, сосредоточена в конечном числе точек (τ_1, u_1) , $(\tau_2, u_2), \dots, (\tau_v, u_v)$, число этих точек случайно и совпадает с $\rho([t_0, T] \times \{|u| > 1\})$, причем

$$P \left\{ \sup_{1 \leq i \leq v} |u_i| > C \right\} = 1 - \exp \left\{ -(T - t_0) \int_{|u| < C} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}$$

можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого C . Обозначим через $[t_{k_i}^{(n)}, t_{k_i+1}^{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, v' \leq v$ те отрезки, которые содержат хотя бы одну из точек τ_1, \dots, τ_v . Так как при $k_i + 1 \leq k < k_{i+1}$

$$\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| > 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) p(ds \times du) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} M |\eta_{k+1}^{(n)}|^2 &= M |\eta_k^{(n)}|^2 + 2 M (a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}), \eta_k^{(n)}) \Delta t_k^{(n)} + \\ &+ M |a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})|^2 (\Delta t_k^{(n)})^2 + M \left| \sum_{j=1}^l b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) [\omega_j(t_{k+1}^{(n)}) - \right. \\ &\left. - \omega_j(t_k^{(n)})] + \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| < 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует такая постоянная H , зависящая лишь от K и $(T - t_0)$, что

$$\begin{aligned} M |\eta_{k+1}^{(n)}|^2 &\leq M |\eta_k^{(n)}|^2 (1 + H \Delta t_k^{(n)}) + H \Delta t_k^{(n)} \leq \\ &\leq M |\eta_k^{(n)}|^2 e^{H \Delta t_k^{(n)}} + H \Delta t_k^{(n)}. \end{aligned}$$

Значит

$$M |\eta_{k+1}^{(n)}|^2 + 1 \leq (M |\eta_k^{(n)}|^2 + 1) e^{H \Delta t_k^{(n)}},$$

поэтому

$$M |\eta_k^{(n)}|^2 \leq M (|\eta_{k_i+1}^{(n)}|^2 + 1) e^{H(T-t_0)} - 1, \quad (3.4)$$

если $k_i + 1 \leq k < k_{i+1}$. Далее

$$\sup_{k_i+1 \leq k < k_{i+1}} |\eta_k^{(n)}| \leq |\eta_{k_i+1}^{(n)}| + \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \Delta t_k^{(n)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^l \sup_{k_i+1 < r < k_{i+1}} \left| \sum_{k=k_j+1}^r b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) (w_j(t_{k+1}^{(n)}) - w_j(t_k^{(n)})) \right| + \\
& + \sup_{k_i+1 < r < k_{i+1}} \left| \sum_{k=k_j+1}^r \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| \leq 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right|.
\end{aligned}$$

Суммы

$$\sum_{k=k_j+1}^r b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) (w_j(t_{k+1}^{(n)}) - w_j(t_k^{(n)}))$$

и

$$\sum_{k=k_j+1}^r \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| \leq 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du)$$

образуют мартингалы по r и поэтому на основании свойства 2 § 5 гл. 1

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \sup_{k_i+1 < r < k_{i+1}} \left| \sum_{k=k_j+1}^r b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}) (w_j(t_{k+1}^{(n)}) - w_j(t_k^{(n)})) \right|^2 \leq \\
& \leq 4 \sum_{k=k_j+1}^{k_{i+1}-1} \mathbb{M} |b_j^{(N)}(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})|^2 \Delta t_k^{(n)} \leq 4K \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}-1} (\mathbb{M} |\eta_k^{(n)}|^2 + 1) \Delta t_k^{(n)}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \sup_{k_i+1 < r < k_{i+1}} \left| \sum_{k=k_j+1}^r \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u| \leq 1} f_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right|^2 \leq \\
& \leq 4K \sum_{k=k_j+1}^{k_{i+1}-1} (\mathbb{M} |\eta_k^{(n)}|^2 + 1) \Delta t_k^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left(\sum_{k=k_j+1}^{k_{i+1}-1} |a_N(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})| \Delta t_k^{(n)} \right)^2 \leq 4K(T - t_0) \sum_{k=k_j+1}^{k_{i+1}-1} (\mathbb{M} |\eta_k^{(n)}|^2 + 1) \Delta t_k^{(n)}.$$

Учитывая неравенство (3.4), можем утверждать, что суще-

ствуют постоянные A и B , зависящие лишь от K и $T - t_0$, такие, что

$$M \sup_{k_i+1 \leq k \leq k_{i+1}} |\eta_k^{(n)}|^2 \leq A + B M |\eta_{k_i+1}^{(n)}|^2. \quad (3.5)$$

Рассматривая условные математические ожидания при фиксированном $\eta_{k_i+1}^{(n)}$, точно таким же образом, как (3.5), можно установить, что

$$M \left(\sup_{k_i+1 \leq k \leq k_{i+1}} |\eta_k^{(n)}|^2 / \eta_{k_i+1}^{(n)} \right) \leq A + B |\eta_{k_i+1}^{(n)}|^2.$$

Заметим далее, что в связи с условием леммы при некотором C

$$M(|\eta_{k_i+1}^{(n)} - \eta_{k_i}^{(n)}|^2 / \eta_{k_i}^{(n)}) \leq C(1 + |\eta_{k_i}^{(n)}|^2) + \sup_{\substack{t \in [t_{n-1}] \\ j \leq j}} |f(t, \eta_{k_i}^{(n)}, u_j)|^2 v^2.$$

Таким образом, $\sup |\eta_k^{(n)}|$ ограничен по вероятности для $k_i + 1 < k < k_{i+1}$ равномерно относительно N и n , если только этим свойством обладает $|\eta_{k_i+1}^{(n)}|$, а $|\eta_{k_i+1}^{(n)}|$ ограничено по вероятности равномерно относительно n и N , если только этим свойством обладает $|\eta_{k_i}^{(n)}|$. Поскольку $|\eta_0^{(n)}|$ ограничено по вероятности равномерно относительно n и N , то, применяя индукцию по i , получаем, что $\sup_k |\eta_k^{(n)}|$ ограничен по вероятности равномерно относительно n и N . Но при $\sup_k |\eta_k^{(n)}| < N$

$$\sup_k |\eta_k^{(n)}| = \sup_k |\xi_k^{(n)}|;$$

следовательно, и $\sup_k |\xi_k^{(n)}|$ ограничен по вероятности равномерно относительно n . Лемма доказана.

Замечание. Из доказанной леммы вытекает, что для всякого $\epsilon > 0$ можно найти такое N и $a_N(t, x)$, $b_k^{(N)}(t, x)$, $f_N(t, x, u)$, отличные от нуля лишь при $|x| < N$, $|u| < N$, что если $\xi_k^{(n)}$ определяется соотношением (3.2), а $\eta_k^{(n)}$ соотношениями (3.3), то

$$P \left\{ \sup_k |\xi_k^{(n)} - \eta_k^{(n)}| > 0 \right\} < \epsilon.$$

Лемма 3. Положим $\xi_n(t) = \xi_k^{(n)}$, если $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$.

Тогда для всякого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_1 - t_2| \leq h} P \{ |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \delta \} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\eta_k^{(n)}$ определяются формулой (3.3), а $a_N(t, x)$, $b_f^{(N)}(t, x)$ и $f_N(t, x, u)$ таковы, что выполняется утверждение предыдущего замечания. Положим $\eta_n(t) = \eta_k^{(n)}$ при $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$, тогда

$$\sup_{|t_1-t_2|<h} \mathbf{P} \{ |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \delta \} \leq \sup_{|t_1-t_2|<h} \mathbf{P} \{ |\eta_n(t_2) - \eta_n(t_1)| > \delta \} + \\ + \mathbf{P} \{ \sup_k |\xi_k^{(n)} - \eta_k^{(n)}| > 0 \}.$$

Из (3.3), ввиду ограниченности $a_N(t, x)$, $b_k^{(N)}(t, x)$ и $f_N(t, x, u)$, легко вывести, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_2-t_1|<h} \mathbf{P} \{ |\eta_n(t_2) - \eta_n(t_1)| > \delta \} = 0,$$

(например

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{t_1 < t_{k+1}^{(n)} < t_2} \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u|<1} f(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right| > \delta \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{t_1 < t_{k+1}^{(n)} < t_2} \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u|<1} \mathbf{M} |f(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u)|^2 \frac{ds du}{|u|^{m+1}} \leq \\ \leq \frac{1}{\delta^2} K(t_2 - t_1 + \max_k \Delta t_k^{(n)} (1 + \sup_k \mathbf{M} |\eta_k^{(n)}|^2));$$

так как $\sup_k \mathbf{M} |\eta_k^{(n)}|^2$ равномерно относительно n ограничен, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_1-t_2|<h} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{t_1 < t_{k+1}^{(n)} < t_2} \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \int_{|u|<1} f(t_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, u) q(ds \times du) \right| > \delta \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\delta^2} Kh (1 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_k \mathbf{M} |\eta_k^{(n)}|^2).$$

Поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_2-t_1|<h} \mathbf{P} \{ |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \delta \} \leq \\ \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \sup_k |\xi_k^{(n)} - \eta_k^{(n)}| > 0 \}.$$

Так как правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой, то из него и вытекает доказательство леммы.

Лемма 4. Пусть p_n — последовательность пуассоновских мер с независимыми значениями, определенных в $[t_0, T] \times R^{(m)}$, для которых

$$\mathbf{M} p_n(A) = \int_A \frac{dt du}{|u|^{m+1}}, \text{ а } q_n(A) = p_n(A) - \mathbf{M} p_n(A),$$

(т. е. меры p_n и q_n имеют такие же свойства, как и меры p и q , определенные в § 4 гл. 2). Рассмотрим последовательность процессов

$$\zeta_n(t) = \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} u q_n(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p_n(ds \times du).$$

Если при $n \rightarrow \infty$ $\zeta_n(t)$ сходится по вероятности при каждом t к некоторому процессу $\zeta_0(t)$, то существует такая пуассоновская мера с независимыми значениями p_0 в пространстве $[t_0, T] \times R^{(m)}$, что

$$M p_0(A) = \int_A \frac{dt du}{|u|^{m+1}},$$

и если $q_0(A) = p_0(A) - M p_0(A)$, то

1)

$$\zeta_0(t) = \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} u q_0(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p_0(ds \times du), \quad (3.6)$$

2) для любой измеримой конечной функции $\varphi(u)$

$$\int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_n(ds \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_0(ds \times du)$$

по вероятности.

Доказательство. Так как процессы $\zeta_n(t)$ все имеют одинаковые конечномерные распределения и являются процессами с независимыми приращениями, то и процесс $\zeta_0(t)$ будет процессом с независимыми приращениями, причем конечномерные распределения процесса $\zeta_0(t)$ будут совпадать с конечномерными распределениями процессов $\zeta_n(t)$.

Процессы с независимыми приращениями с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода. Обозначим через $p_0(A)$, если $A \subset [t_0, T] \times R^{(m)}$, число скачков процесса $\zeta_0(t)$, для которых $(t, \zeta_0(t+0) - \zeta_0(t-0)) \in A$. Как видно, $p_0(A)$ имеет такие же совместные распределения (при разных A), что и меры $p_n(A)$, т. е. $p_0(A)$ является пуассоновской мерой с независимыми значениями, для которой

$$M p_0(A) = \int_A \frac{dt du}{|u|^{m+1}}.$$

Обозначим через $v_n, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{v_n}^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_{v_n}^{(n)}$ число, моменты и величины скачков $\zeta_n(t)$, превосходящих по абсолютной величине ε , а через $v, \tau_1, \dots, \tau_v, u_1, \dots, u_v$ число, моменты и величины

ны скачков $\xi_0(t)$, превосходящих по абсолютной величине ε . Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow v$, $\tau_k^{(n)} \rightarrow \tau_k$, $u_k^{(n)} \rightarrow u_k$ по вероятности. Так как

$$\int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_n(ds \times du) = \sum_{k=1}^{v_n} \varphi(u_k^{(n)}),$$

$$\int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_0(ds \times du) = \sum_{k=1}^v \varphi(u_k),$$

величины u_k и $u_k^{(n)}$ имеют одинаковые распределения

$$P\{u_k \in A\} = \left(\int_{\substack{|u| > \varepsilon \\ u \in A}} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right) \left(\int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right)^{-1},$$

и для непрерывной функции $g(u)$ $g(u_k^{(n)}) \rightarrow g(u)$ по вероятности, то и

$$\int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_n(ds \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{|u| > \varepsilon} \varphi(u) p_0(ds \times du)$$

по вероятности, поскольку можно подобрать такую непрерывную функцию g , при которой $M|g(u_k) - \varphi(u_k)|$ было сколь угодно малым. Утверждение 2 леммы доказано.

Для того, чтобы установить утверждение 1, заметим, что

$$\int_{t_0}^t \int_{|u| > \varepsilon} u p_n(ds \times du) \rightarrow \int_{t_0}^t \int_{|u| > \varepsilon} u p_0(ds \times du)$$

по вероятности на основании утверждения 2. Исходя из этого

$$\int_{t_0}^t \int_{\varepsilon < |u| < 1} u q_n(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p_n(ds \times du) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^t \int_{\varepsilon < |u| < 1} u q_0(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p_0(ds \times du)$$

по вероятности. Поэтому для всякого $\rho > 0$

$$P\left\{\left|\xi_0(t) - \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} u q_0(ds \times du) - \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p_0(ds \times du)\right| > \rho\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left|\int_{t_0}^t \int_{|u| < \varepsilon} u q_0(ds \times du)\right| > \frac{\rho}{3}\right\} +$$

$$+ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \int_{|u| \leq \varepsilon} u q_n(ds \times du) \right| > \frac{\rho}{3} \right\} \leq \frac{18}{\rho^2} (t - t_0) \int_{|u| \leq \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы существования. Пусть $\xi_n(t)$ определено так, как в лемме 3, $\xi_n(t)$ определено так, как в лемме 4. Тогда для каждого из процессов $\xi_n(t)$, $\zeta_n(t)$, $w_1(t), \dots, w_l(t)$ выполняются условия замечания 2 § 6 гл. 1. Поэтому на основании следствия 2, § 6, гл. 1 можно выбрать подпоследовательность n' и построить процессы $\tilde{\xi}_{n'}(t)$, $\tilde{\zeta}_{n'}(t)$, $\tilde{w}_1^{(n')}(t), \dots, \tilde{w}_l^{(n')}(t)$, совместные конечномерные распределения которых при каждом n' совпадали бы с совместными конечномерными распределениями процессов $\xi_{n'}(t)$, $\zeta_{n'}(t)$, $w_1(t), \dots, w_l(t)$ и при $n' \rightarrow \infty$ $\tilde{\xi}_{n'}(t) \rightarrow \tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\zeta}_{n'}(t) \rightarrow \tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{w}_j^{(n')}(t) \rightarrow \tilde{w}_j(t)$ по вероятности, где $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$ — некоторые случайные процессы.

Пусть \tilde{p}_n и \tilde{p} — меры, построенные по процессам $\tilde{\xi}_{n'}(t)$ и $\tilde{\zeta}(t)$ точно таким же образом, как в доказательстве леммы 4 построена по процессу $\zeta_0(t)$ мера p_0 . Меры $\tilde{p}_{n'}$ и \tilde{p} являются пуассоновскими мерами с независимыми значениями, для которых

$$\mathbf{M} \tilde{p}_n(A) = \mathbf{M} \tilde{p}(A) = \int \frac{dt du}{|u|^{m+1}}.$$

Положим далее

$$\tilde{q}(A) = \tilde{p}(A) - \mathbf{M} \tilde{p}(A), \quad \tilde{q}_n(A) = \tilde{p}_n(A) - \mathbf{M} \tilde{p}_n(A).$$

Из независимости процессов $\tilde{\xi}_{n'}(t)$, $\tilde{w}_1^{(n')}(t), \dots, \tilde{w}_l^{(n')}(t)$ вытекает также независимость процессов $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$ и меры \tilde{p} . Как видно, совместные конечномерные распределения процессов $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$ и мер \tilde{p} , \tilde{q} точно такие же, как и совместные конечномерные распределения процессов $w_1(t), \dots, w_l(t)$ и мер p , q . Если установить существование решения (1.7), когда $w_1(t), \dots, w_l(t)$, p , q будут заменены на $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$, \tilde{p} , \tilde{q} , то этим самым будет установлено существование решения (1.7) (существующее решение определенным образом будет выражаться через $\tilde{\xi}(t_0)$, $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$, \tilde{p} , \tilde{q} ; поэтому, рассматривая точно такую же функцию от $\tilde{\xi}(t_0)$, $w_1(t), \dots, w_l(t)$, p , q , получим решение уравнения (1.7). Покажем, что решением уравнения (1.7), если в этом уравнении заменить $w_1(t), \dots, w_l(t)$, p , q на $\tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t)$, \tilde{p} , \tilde{q} , будет $\tilde{\xi}(t)$. $\tilde{\xi}_{n'}(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{\xi}_{n'}(t) = \tilde{\xi}_{n'}(t_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} a(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')})) \Delta t_k^{(n')} + \\
& + \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \sum_{j=1}^l b_j(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')})) [\tilde{w}_j^{(n')}(t_{k+1}^{(n')}) - \tilde{w}_j^{(n')}(t_k^{(n')})] + \\
& + \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \left(\int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| \leq 1} f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}, u) \tilde{q}_{n'}(ds \times du) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| > 1} f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}, u) \tilde{p}_{n'}(ds \times du) \right). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Используя то, что

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\tilde{\xi}_{n'}(t)| > N \right\} = P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\xi_{n'}(t)| > N \right\}$$

равномерно относительно n' стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, непрерывность $a(t, x)$ и $b_j(t, x)$, а также сходимость $\tilde{\xi}_{n'}(t)$ к $\tilde{\xi}(t)$ и $\tilde{w}_j^{(n')}(t)$ к $\tilde{w}_j(t)$, можно, применяя теорему § 3 гл. 2, показать, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} b_j(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')})) [\tilde{w}_j^{(n')}(t_{k+1}^{(n')}) - \tilde{w}_j^{(n')}(t_k^{(n')})] \rightarrow \\
& \rightarrow \int_{t_0}^t b_j(s, \tilde{\xi}(s)) d\tilde{w}_j(s)
\end{aligned}$$

по вероятности при $n' \rightarrow \infty$,

$$\sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} a(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')})) \Delta t_k^{(n')} \rightarrow \int_{t_0}^t a(s, \tilde{\xi}(s)) ds$$

по вероятности при $n' \rightarrow \infty$, и что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| \leq 1} f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}, u) \frac{dt du}{|u|^{m+1}} \rightarrow \int_{t_0}^t \int_{|u| \leq 1} f(s, \tilde{\xi}(s), u) \frac{ds du}{|u|^{m+1}}$$

по вероятности при $n' \rightarrow \infty$.

Рассмотрим величины

$$\sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| < \varepsilon} f(t_k^{(n')}, \xi_{n'}(t_k^{(n')}), u) \tilde{q}_{n'}(ds \times du).$$

Если $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$, то для всякого $\rho > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| < \varepsilon} f(t_k^{(n')}, \xi_{n'}(t_k^{(n')}), u) \tilde{q}_{n'}(ds \times du) \right| > \rho \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_t |\tilde{\xi}_{n'}(t)| > N \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| < \varepsilon} M |f(t_k^{(n')}, \xi_{n'}(t_k^{(n')}), u)|^2 g_N(\xi_{n'}(t_k^{(n')})) \times \\ & \times \frac{dt du}{|u|^{m+1}} \leq \frac{T - t_0}{\rho^2} \sup_{\substack{|x| \leq N \\ t \in [t_0, T]}} \int_{|u| < \varepsilon} |f(t, x, u)|^2 \frac{dt du}{|u|^{m+1}} + \\ & + \mathbf{P} \left\{ \sup_t |\tilde{\xi}_{n'}(t)| > N \right\}. \end{aligned}$$

Из условия 2 теоремы вытекает, что для всякого N

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{|x| \leq N \\ t \in [t_0, T]}} \int_{|u| < \varepsilon} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 0.$$

Таким образом, выбором достаточно малого $\varepsilon > 0$ можна сделать

$$\sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| < \varepsilon} f(t_k^{(n')}, \xi_{n'}(t_k^{(n')}), u) \tilde{q}_{n'}(ds \times du)$$

сколь угодно малой по вероятности равномерно относительно n' . Аналогичная оценка показывает, что и

$$\int_{t_0}^t \int_{|u| < \varepsilon} f(s, \tilde{\xi}(s), u) \tilde{q}(ds \times du)$$

выбором достаточно малого ε можно сделать сколь угодно малым по вероятности. Если мы покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{t_{k+1}^{(n')} < t} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| > \varepsilon} f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}, u) \tilde{p}_{n'}(ds \times du) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^t \int_{|u| > \varepsilon} f(s, \tilde{\xi}(s), u) \tilde{p}(ds \times du) \quad (3.8)$$

по вероятности при $n' \rightarrow \infty$, то, переходя в (3.7) к пределу при $n' \rightarrow \infty$, получим, что $\tilde{\xi}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7), в котором $w_k(t)$, p ; q заменены на $\tilde{w}_k(t)$, \tilde{p} , \tilde{q} , т. е. получим доказательство теоремы.

Для доказательства соотношения (3.8) докажем следующую лемму.

Лемма 5. Если $t_0 \leq t < t + h \leq T$, то

$$\int_t^{t+h} \int_{|u| > \varepsilon} f(t, \tilde{\xi}_{n'}(t), u) \tilde{p}_{n'}(ds \times du) \rightarrow \int_t^{t+h} \int_{|u| > \varepsilon} f(t, \tilde{\xi}(t), u) \tilde{p}(ds \times du)$$

по вероятности при $n' \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(x) = \int_t^{t+h} \int_{|u| > \varepsilon} f(t, x, u) \tilde{p}_n(ds \times du) \quad \text{и}$$

$$\varphi_0(x) = \int_t^{t+h} \int_{|u| > \varepsilon} f(t, x, u) \tilde{p}(ds \times du).$$

Случайные функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_0(x)$ имеют одинаковые конечные распределения. Кроме того, $\varphi_n(x)$ и $\varphi_0(x)$ с вероятностью 1 непрерывны, так как $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n_n} f(t, x, u_k^n)$ на основании леммы 1, а $f(t, x, u)$ непрерывно по x, t почти при всех u (то же самое относится и к $\varphi_0(x)$). Из непрерывности $\varphi_0(x)$ с вероятностью 1 следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ и $C > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ |x| < C}} |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Поэтому, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $C > 0$, $\eta > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, для которого

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ |x| < C}} |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| > \varepsilon \right\} > \eta.$$

Так как $\varphi_n(x)$ и $\varphi_0(x)$ имеют одинаковые распределения, то и

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ |x| \leq C}} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| > \varepsilon \right\} < \eta.$$

Из леммы 4 вытекает, что $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ по вероятности для всех x . Пусть x_k , $k = 1, 2, \dots, N$ образует δ -сеть во множестве $\{|x| \leq C\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{|x| \leq C} |\varphi_{n'}(x) - \varphi_0(x)| > 3\varepsilon \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \sup_k |\varphi_{n'}(x_k) - \varphi_0(x_k)| > \varepsilon \right\} + \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ |x| \leq C}} |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| > \varepsilon \right\} + \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ |x| \leq C}} |\varphi_{n'}(x) - \right. \\ &\left. - \varphi_{n'}(y)| > \varepsilon \right\} \leq \sum_{k=1}^N \mathbf{P} \left\{ |\varphi_{n'}(x_k) - \varphi_0(x_k)| > \varepsilon \right\} + 2\eta. \end{aligned}$$

Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ и $C > 0$

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{|x| \leq C} |\varphi_{n'}(x) - \varphi_0(x)| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (3.9)$$

Для доказательства леммы нужно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ |\varphi_{n'}(\tilde{\xi}_{n'}(t)) - \varphi_0(\tilde{\xi}(t))| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Но

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ |\varphi_{n'}(\tilde{\xi}_{n'}(t)) - \varphi_0(\tilde{\xi}(t))| > \varepsilon \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ |\tilde{\xi}(t)| > C \right\} + \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \sup_{|x| \leq C} |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \mathbf{P} \left\{ |\varphi_0(\tilde{\xi}_{n'}(t)) - \varphi_0(\tilde{\xi}(t))| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}; \end{aligned}$$

так что из (3.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ |\varphi_{n'}(\tilde{\xi}_{n'}(t)) - \varphi_0(\tilde{\xi}(t))| > \varepsilon \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ |\tilde{\xi}(t)| > C \right\} + \\ &+ \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ |\varphi_0(\tilde{\xi}_{n'}(t)) - \varphi_0(\tilde{\xi}(t))| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как $\varphi_0(x)$ непрерывно с вероятностью 1 и $\tilde{\xi}_{n'}'(t) \rightarrow \tilde{\xi}(t)$ по вероятности. Выбором C $\mathbf{P}\{|\tilde{\xi}(t)| > C\}$ можем сделать сколь угодно малым. Следовательно, (3.10) действительно выполняется. Лемма доказана.

Для вывода формулы (3.8) возьмем произвольное разбиение отрезка $[t_0, t]: t_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_r = t$. Тогда

$$\Delta_{n'} = \sum_{\substack{t_{k+1}^{(n')} < t \\ t_k^{(n')} < t}} \int_{t_k^{(n')}}^{t_{k+1}^{(n')}} \int_{|u| < \varepsilon} \mathcal{J}(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}), u) \tilde{p}_{n'}(ds \times du) -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^t \int_{|u| > \varepsilon} f(s, \tilde{\xi}(s), u) \tilde{p}(ds \times du) = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{t_i < t_{k+1}^{(n')} \leq \bar{t}_{i+1}} \int_{t_k^{(n')} |u| > \varepsilon}^{t_{k+1}^{(n')}} \int f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}_{n'}(\bar{t}_i), u) \times \right. \\
& \quad \times \tilde{p}_{n'}(ds \times du) - \int_{\frac{\bar{t}_i}{t_i}}^{\bar{t}_{i+1}} \int_{|u| > \varepsilon} f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}(\bar{t}_i), u) \tilde{p}(ds \times du) \Big) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{\bar{t}_i < t_{k+1}^{(n')} < \bar{t}_i} \int_{t_k^{(n')} |u| > \varepsilon}^{t_{k+1}^{(n')}} \int [f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}), u) - \right. \\
& \quad \left. - f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}_{n'}(\bar{t}_i), u)] \tilde{p}_{n'}(ds \times du) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=0}^{r-1} \left(\int_{\frac{\bar{t}_i}{t_i}}^{\bar{t}_{i+1}} \int_{|u| > \varepsilon} [f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}(\bar{t}_i), u) - f(s, \tilde{\xi}(s), u)] p(ds \times du) \right). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Первая сумма $\sum_{i=0}^{r-1}$ в правой части последнего равенства стремится к нулю по вероятности по лемме 5. Для второй суммы имеем неравенство

$$\begin{aligned}
& \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\bar{t}_i < t_{k+1}^{(n')} < \bar{t}_{i+1}} \int_{t_k^{(n')} |u| > \varepsilon}^{t_{k+1}^{(n')}} \int [f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}), u) - \right. \\
& \quad \left. - f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}_{n'}(\bar{t}_i), u)] \tilde{p}_{n'}(ds \times du) \right\} > \rho \leq \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_t |\tilde{\xi}_{n'}(t)| > C \right\} + \\
& \quad + \mathbf{P} \left\{ \int_{t_0}^T \int_{|u| > C} \tilde{p}_n(ds \times du) > 0 \right\} + \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\bar{t}_i < t_{k+1}^{(n')} < \bar{t}_{i+1}} \times \\
& \quad \times \int_{t_k^{(n')} |u| > \varepsilon}^{t_{k+1}^{(n')}} \int \mathbf{M} |f(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')}), u) - \\
& \quad - f(\bar{t}_i, \tilde{\xi}_{n'}(\bar{t}_i), u) | g_C(u) g_C(\tilde{\xi}_{n'}(\bar{t}_i)) g_C(\tilde{\xi}_{n'}(t_k^{(n')})) \frac{dt du}{|u|^{m+1}},
\end{aligned}$$

($g_C(x) = 1$ при $|x| \leq C$, $g_C(x) = 0$ при $|x| > C$). Третье сла-

гаемое можно сделать сколь угодно малым выбором малого $\max_i (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i)$ по лемме 3 и условию 4 теоремы. Так как выбором достаточно большого C два первых слагаемых можно сделать сколь угодно малыми, то и все оцениваемое выражение может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно малого $\max_i (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i)$. Точно так же можно показать, что и третья сумма в (3.11) выбором достаточно малого $\max_i (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i)$ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом (3.8) доказано, а значит доказана и теорема.

Следствие. Если $\xi_n(t)$ определены так, как в лемме 3, то если коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям обеих теорем этого параграфа, конечномерные распределения $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, являющегося решением уравнения (1.7). Действительно, из второй теоремы вытекает, что какова бы ни была последовательность n' из нее можно выбрать такую подпоследовательность n'_k , чтобы конечномерные распределения процессов $\xi_{n'_k}(t)$ сходились к конечномерным распределениям единственного решения уравнения (1.7). Поэтому и конечномерные распределения всей последовательности $\xi_n(t)$ будут сходиться к тому же пределу.

§ 4. Решения стохастических уравнений как процессы Маркова

Рассмотрим решение уравнения (1.7), если коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям теорем существования и единственности предыдущего параграфа.

Пусть F_t минимальная σ -алгебра событий, относительно которой измеримы величины $\omega_1(s), \dots, \omega_l(s), \xi(t_0)$ и $p([t_0, s] \times A)$ при $s \leq t$ и произвольном борелевском множестве A из $R^{(m)}$; $F_{[t, t+h]}$ — минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримы величины $\omega_1(s) - \omega_1(t), \dots, \omega_l(s) - \omega_l(t)$ и $p([t, s] \times A)$ при $s \in [t, t+h]$ и произвольном борелевском множестве A из $R^{(m)}$; $F_{[t]}$ — минимальная σ -алгебра, относительно которой измерима величина $\xi(t)$. Положим

$$\begin{aligned}
 g(h, x, \omega) = & x + \int_0^h a(t+s, g(s, x, \omega)) ds + \sum_{j=1}^l \int_0^h b_j(t+ \\
 & + s, g(s, x, \omega)) dw_j(s+t) + \int_0^h \int_{|u| < 1} f(t+s, g(s, x, \omega), u) q(d(t+s) \times \\
 & \times du) + \int_0^h \int_{|u| > 1} f(t+s, g(s, x, \omega), u) p(d(t+s) \times du)
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

(здесь удобно указать зависимость от случайной переменной ω). Величина $g(h, x, \omega)$ для всех x и $h > 0$, измерима относительно $F_{[t, t+h]}$. Очевидно, что $g(h, \xi(t), \omega) = \xi(t+h)$, если $\xi(t)$ является решением уравнения (1.7).

Лемма 1. Для всякой ограниченной борелевской функции $\lambda(x)$

$$M(\lambda(\xi(t+h)) | F_t) = M(\lambda \xi(t+h) | F_t).$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что для всякой ограничено измеримой функции $\psi(x, \omega)$, для которой $\psi(x, \omega)$ при каждом x измеримо относительно $F_{[t, t+h]}$ будет выполняться соотношение

$$M(\psi(\xi(t+h), \omega) | F_t) = M(\psi(\xi(t+h), \omega) / \xi(t)) = C(\xi(t)), \quad (4.2)$$

где $C(x) = M\psi(x, \omega)$. Покажем сначала, что (4.2) будет выполняться для кусочно-постоянных функций $\psi(x, \omega)$, т. е. таких функций, для которых существуют непересекающиеся борелевские множества A_1, A_2, \dots, A_k , $\bigcup_i A_i = R^{(m)}$ такие, что на каждом из этих множеств $\psi(x, \omega)$ постоянно, т. е. существуют случайные величины ψ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, измеримые относительно $F_{[t, t+h]}$ такие, что $\psi(x, \omega) = \sum_i \chi_{A_i}(x) \psi_i$, если $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A_i . Для того, чтобы установить (4.2), как следует из § 2 гл. I, нужно показать, что для всякой ограниченной величины η , измеримой относительно F_t , будет выполняться соотношение

$$M\eta\psi(\xi(t+h), \omega) = M\eta C(\xi(t)).$$

Но

$$M\eta\psi(\xi(t), \omega) = M\eta \sum \chi_{A_i}(\xi(t)) \psi_i.$$

Так как величины ψ_i не зависят от $\eta \cdot \chi_{A_i}(\xi(t))$ (каждая величина, измеримая относительно $F_{[t, t+h]}$, не зависит от каждой величины, измеримой относительно F_t), то

$$M\eta\psi(\xi(t), \omega) = M\eta \sum \chi_{A_i}(\xi(t)) \cdot M\psi_i.$$

Поскольку $M\psi(x, \omega) = \sum \chi_{A_i}(x) M\psi_i$, предыдущую формулу можно переписать в следующем виде: $M\eta\psi(\xi(t), \omega) = M\eta C(\xi(t))$. Формула (4.2) установлена для конечнозначных функций. Доказательство этой формулы в общем случае получается предельным переходом от конечнозначных функций. Из равенства $\xi(t+h) = g(h, \xi(t), \omega)$ и (4.2) получаем доказательство леммы.

Следствие. Если $\lambda(x)$ характеристическая функция некоторого борелевского множества A , то

$$P\{\xi(t+h) \in A | F_t\} = P\{\xi(t+h) \in A / \xi(t)\}. \quad (4.3)$$

Из этой формулы, учитывая, что $\xi(s)$ при $s \leq t$ измеримо относительно F_t , получаем

$$P\{\xi(t+h) \in A / \xi(s), s \in [t_0, t]\} = P\{\xi(t+h) \in A / \xi(t)\}. \quad (4.4)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия теорем существования и единственности из предыдущего параграфа, то решение уравнения (1.7) будет процессом Маркова.

Исследуем, на сколько широк класс марковских процессов, являющихся решениями стохастических уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах. Покажем, что среди решений уравнений вида (1.7) будут однородные процессы с независимыми приращениями со всевозможными характеристическими функциями, задаваемыми формулой (3.2) гл. 1. Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Существуют такие векторы \bar{a} , b_1, b_2, \dots, b_m и борелевская функция $f(u)$, определенная при $u \in R^{(m)}$, принимающая значения из $R^{(m)}$, ограниченная в каждой ограниченной области изменения u , непрерывная при $u = 0$ и удовлетворяющая соотношению

$$\int_{|u| < 1} |f(u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty,$$

что процесс

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \int_0^t \bar{a} ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_j dw(s) + \\ & + \int_0^t \int_{|u| < 1} f(u) q(ds \times du) + \int_0^t \int_{|u| > 1} f(u) p(ds \times du) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$(w_1(t), \dots, w_m(t))$, p и q такие, как и в предыдущих параграфах) будет однородным процессом с независимыми приращениями с характеристической функцией, определенной формулой (3.2) гл. 1.

Доказательство. То, что процесс $\xi(t)$ будет однородным процессом с независимыми приращениями, непосредственно вытекает из свойств мер p и q и процессов $w_j(t)$. Для подсчета характеристической функции $\xi(t)$ заметим, что все слагаемые в правой части (4.5) независимы между собой. Поэтому достаточно найти характеристическую функцию каждого слагаемого, а затем перемножить найденные выражения.

Имеем:

$$M \exp \left[i \left(z, \int_0^t b_j dw(s) \right) \right] = M \exp [i(z, b_j)(w(t) - w(0))] = e^{-\frac{(z, b_j)^2 t}{2}}.$$

Для любой кусочно-постоянной функции $f(u)$, для которой $f(u) = f(u_k)$ при $u \in G_k$, $\bigcup_k G_k = R^{(m)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \exp \left(i \left(z, \int_0^t f(u) p(ds \times du) \right) \right) &= \mathbf{M} \exp \left[i \sum_k (z, f(u_k)) p([0, t] \times \right. \\ &\quad \left. \times G_k) \right] = \prod_k \mathbf{M} \exp [i(z, f(u_k)) p([0, t] \times G_k)] = \\ &= \prod_k \exp \left((e^{i(z, f(u_k))} - 1) \int_{G_k} \frac{tdu}{|u|^{m+1}} \right) = \exp \left[t \int (e^{i(z, f(u))} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $p([0, t] \times G_k)$ независимы между собой и распределены по закону Пуассона с параметром $t \int_{u \in G_k} \frac{du}{|u|^{m+1}}$). Поэтому для всякой функции $f(u)$, для которой

имеет смысл $\int_0^t \int_{R^{(m)}} f(u) p(ds \times du)$, будет выполняться соотношение

$$\mathbf{M} \exp \left\{ i \left(z, \int_0^t \int_{R^{(m)}} f(u) p(ds \times du) \right) \right\} = \exp \left\{ t \int (e^{i(z, f(u))} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) вытекает, что для всякой функции, для которой

$$\int |f(u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty,$$

выполняется

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \exp \left\{ i \left(z, \int_0^t \int_{R^{(m)}} f(u) q(ds \times du) \right) \right\} &= \\ &= \exp \left\{ t \int (e^{i(z, f(u))} - 1 - i(z, f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, характеристическая функция процесса $\xi(t)$, определённого формулой (4.5), будет равна:

$$\mathbf{M} \exp \{i(z, \xi(t))\} = \exp \left\{ t \left[i(\bar{a}, z) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (b_j, z)^2 + \right. \right.$$

$$+ \int_{|u| < 1} (e^{i(z, f(u))} - 1 - i(z, f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \int_{|u| > 1} (e^{i(z, f(u))} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \Big] \Big\}. \quad (4.8)$$

Для того, чтобы $\sum_{j=1}^m (\bar{b}_j, z)^2 = (Az, z)$, достаточно взять $\bar{b}_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$, где e_j — ортонормированная система собственных векторов оператора A , а λ_j — соответствующие им собственные значения. Если в (4.8) сделать замену $f(u) = x$, то для совпадения полученной формулы с формулой (3.2) гл. 1 достаточно, чтобы

$$\bar{a} = a + \int_{\substack{|u| < 1 \\ |f(u)| < 1}} f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} - \int_{\substack{|u| > 1 \\ |f(u)| < 1}} f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}}$$

и чтобы для каждого борелевского множества, для которого $\Pi(A) < \infty$, выполнялось соотношение:

$$\Pi(A) = \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}}.$$

Доказательство теоремы, следовательно, будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 2. Для всякой меры $\Pi(A)$, определенной на борелевских множествах $R^{(m)}$, для которой

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \Pi(dx) < \infty,$$

существует измеримая функция $f(u)$, определенная при $u \in R^{(m)}$, принимающая значения из $R^{(m)}$ и ограниченная в каждой конечной области изменения u такая, что

$$1) \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0,$$

2) для всякого борелевского множества A , для которого $\Pi(A) < \infty$ выполняется соотношение

$$\int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} = \Pi(A),$$

$$3) \int_{|u| < 1} |f(u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty.$$

Доказательство. Разобьём пространство $R^{(m)}$ на сферические слои C_n , $n = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$; C_n — совокупность точек u , для которых $2^n \leq |u| < 2^{n+1}$. Пусть число r_n таково, что

$$\int_{|u| > 2^n} \Pi(du) = \int_{|u| > r_n} \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

а C_n' — совокупность точек u , для которых $r_n \leq |u| < r_{n+1}$.

Обозначим через $T_n(u) = 2^n u$ отображение C_0 на C_n . $T'_n(u) = \frac{u}{|u|} [r_n + (r_{n+1} - r_n) (|u| - 1)]$ отображение C_0 на C'_n . Определим далее для каждого натурального k и каждого набора индексов i_1, i_2, \dots, i_k , принимающих значения 0 и 1, множества S_{i_1, i_2, \dots, i_k} так, чтобы выполнялись условия:

$$\text{а) } S_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0} \cup S_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1} = S_{i_1, \dots, i_{k-1}}, \quad S_0 \cup S_1 = C_0,$$

б) S_{i_1, i_2, \dots, i_k} не пересекается с S_{j_1, j_2, \dots, j_k} , если хотя бы одно i_l отлично от j_l ,

в) диаметр S_{i_1, i_2, \dots, i_k} стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Положим $T_n S_{i_1, i_2, \dots, i_k} = S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$, $T'_n (S_{i_1, i_2, \dots, i_k}) = S_{i_1, \dots, i_k}'^{(n)}$.

Множества $S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ и $S_{i_1, \dots, i_k}'^{(n)}$ удовлетворяют тем же условиям за исключением того, что

$$S_0^{(n)} \cup S_1^{(n)} = C_n, \quad S_0'^{(n)} \cup S_1'^{(n)} = C'_n.$$

Пусть

$$\pi_{i_1, \dots, i_k}^{(n)} = \Pi(S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}), \quad \pi_{i_1, \dots, i_k}'^{(n)} = \int_{u \in S_{i_1, \dots, i_k}'^{(n)}} \frac{du}{|u|^{m+1}}.$$

Определим теперь функцию $g_n(\alpha)$ по формуле:

$$g_n(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{i_1 \\ 2} + \frac{i_2}{4} + \dots + \frac{i_k}{2^k} \leq \alpha} \pi_{i_1, i_2, \dots, i_k}'^{(n)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Данная функция будет не убывающей и непрерывной (непрерывность её вытекает из того, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_{i_1, i_2, \dots, i_k}'^{(n)} = 0$, так как диаметр $S_{i_1, \dots, i_k}'^{(n)}$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$). Пусть $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ таково, что

$$g_n(\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}) = \sum_{\substack{j_1 \\ 2} + \frac{j_2}{4} + \dots + \frac{j_k}{2^k} \leq \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \dots + \frac{i_k}{2^k}} \pi_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{(n)},$$

(существование $\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ следует из того, что

$$g_n(0) = 0, \quad g_n(1) = \int_{u \in C'_n} \frac{du}{|u|^{m+1}} = \Pi(C_n) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \pi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}.$$

Положим далее

$$U_n(\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \dots + \frac{i_k}{2^k} < \alpha} S'_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$$

$$V_{i_1, \dots, i_k}^{(n)} = U_n(\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}) - U_n(\alpha_{j_1, \dots, j_k}^{(n)}),$$

где

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} + \dots + \frac{j_k + 1}{2^k} = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \dots + \frac{i_k}{2^k}.$$

Очевидно при этом выполняются следующие условия: $V_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ и $V_{j_1, \dots, j_k}^{(n)}$ не пересекаются, если хотя бы одно i_l не равно j_l ,

$$\begin{aligned} & \bigcup_{j_1, \dots, j_k} V_{j_1, \dots, j_k}^{(n)} = \\ & \frac{j_1}{2} + \dots + \frac{j_k}{2^k} < \frac{i_1}{2} + \dots + \frac{i_k}{2^k} \\ & = U_n(\alpha_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}), V_{i_1, \dots, i_{k-1}, 0}^{(n)} \cup V_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1}^{(n)} = V_{i_1, \dots, i_{k-1}}^{(n)}, \end{aligned}$$

$$\text{и } \int_{u \in V_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}} \frac{du}{|u|^{m+1}} = \pi_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}, \quad \text{так как } \int_{u \in U_n(\alpha)} \frac{du}{|u|^{m+1}} = g_n(\alpha).$$

Выберем в каждом из множеств $S'_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ по точке $x_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ и пусть $f_k(x) = x_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$, если $x \in V_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$. Так как диаметры множеств $S'_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(n)}$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, то $f_k(x)$ для каждого x имеет предел при $k \rightarrow \infty$, причём этот предел существует равномерно на каждом ограниченном множестве. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$. Покажем, что для функции $f(x)$ выполняются условия леммы. Заметим, что при $|u| \leq r_n$ $|f(u)| \leq 2^n$. Поэтому $f(u)$ ограничена в каждой ограниченной области и удовлетворяет условию 1 леммы. Для доказательства условия 2 рассмотрим меру

$$\bar{\Pi}(A) = \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}}$$

и покажем, что она совпадает с мерой $\Pi(A)$. Для этого достаточно установить совпадение $\Pi(A)$ и $\bar{\Pi}(A)$ на некоторой алгебре множеств, борелевское замыкание которой совпадает с σ -алгеброй борелевских множеств. Такой алгеброй может служить алгебра ограниченных множеств A , для которых $\Pi(\bar{A} \cap R^{(m)} \setminus \bar{A}) = 0$ (\bar{A} — замыкание множества A). Пусть A^ε — множество всех точек, расстояние которых от A не более ε , а A_ε — множество

внутренних точек A , расстояние которых до границы множества A не менее ε . Возьмём такое k , чтобы диаметр $S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$ был меньше $\varepsilon/2$. Тогда, если $f(x) \in A$, то $f_k(x) \in A_{\varepsilon/2}$, а если $f_k(x) \in A_{\varepsilon/2}$, то $f(x) \in A$. Поэтому

$$\bar{\Pi}(A) = \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \int_{f_k(u) \in A_{\varepsilon/2}} \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \sum_{S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)} \cap A_{\varepsilon/2} \neq \emptyset} \Pi(S_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}) \leq \Pi(A^{\varepsilon}).$$

Аналогично устанавливаем, что $\bar{\Pi}(A) \geq \Pi(A_{\varepsilon})$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Pi(A^{\varepsilon}) - \Pi(A_{\varepsilon})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi(A^{\varepsilon} - A_{\varepsilon}) = 0,$$

получим $\bar{\Pi}(A) = \Pi(A)$. Так что для нашей функции свойство 2 леммы выполняется. Свойство 3 вытекает из соотношения:

$$\int_{2^{-n} < |x| < 2^0} |x|^2 \Pi(dx) = \int_{r_{-n} < |u| < r_0} |f(u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

которое является следствием свойства 2 и того, что при $2^{-n} \leq |f(u)| < 2^0$ будет $r_{-n} \leq |u| < r_0$. Лемма доказана.

Введём понятие дифференциала Ито марковского процесса. Будем говорить, что марковский процесс $\xi(t)$ дифференцируем в смысле Ито в точке t , если для всех $z \in R^{(m)}$ выражение

$$\frac{1}{\Delta} \log \mathbf{M}(e^{i(z, \xi(t+\Delta) - \xi(t))} / \xi(t)). \quad (4.9)$$

имеет предел в смысле сходимости по вероятности при $\Delta \rightarrow +0$. Величина этого предела и называется дифференциалом Ито процесса $\xi(t)$ в точке t . Величина дифференциала Ито является функцией от z и $\xi(t)$, причём как функция z она почти при всех ω имеет вид характеристической функции безгранично делимого закона, т. е. характеристической функции распределения процесса с независимыми приращениями. Обозначим предел выражения (4.9) через $\varphi(t, \xi(t), z)$. Из теоремы 2 вытекает, что существуют такие векторы $a(t, x)$, $b_1(t, x), \dots, b_l(t, x)$ и функция $f(t, x, u)$, что с вероятностью 1 выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \xi(t), z) &= i(a(t, \xi(t)), z) - \frac{1}{2} \sum_1^l (b_k(t, \xi(t)), z)^2 + \\ &+ \int_{|u| < 1} [e^{i(z, f(t, \xi(t), u))} - 1 - i(z, f(t, \xi(t), u))] \frac{du}{|u|^{m+1}} + \\ &+ \int_{|u| > 1} (e^{i(z, f(t, \xi(t), u))} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если процесс имеет в каждой точке отрезка $[t_0, T]$ дифференциал Ито, то мы будем называть его дифференцируемым в

смысле Ито на $[t_0, T]$. Решения стохастических уравнений при широких предположениях имеют дифференциалы Ито, причём эти дифференциалы могут иметь довольно произвольную форму. Установим одну простейшую теорему о существовании процесса с заданным дифференциалом Ито.

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$ является решением уравнения (1.8), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 4 из § 2 и условиям

- 1) $a(t, x), b_k(t, x)$ непрерывны по t ,
- 2) $\lim_{t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow 0} \int_{R^{(m)}} |f(t_1, x, u) - f(t_2, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 0$.

Тогда процесс $\xi(t)$ будет иметь в каждой точке t дифференциал Ито, равный

$$i(a(t, \xi(t)), z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (b_k(t, \xi(t)), z) + \\ + \int_{R^{(m)}} [e^{i(z, f(t, \xi(t), u))} - 1 - i(z, f(t, \xi(t), u))] \frac{du}{|u|^{m+1}}. \quad (4.11)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\xi(t + \Delta) = \xi(t) + \int_t^{t+\Delta} a(s, \xi(s)) ds + \sum_{k=1}^m \int_t^{t+\Delta} b_k(s, \xi(s)) d\omega_k(s) + \\ + \int_t^{t+\Delta} \int_{R^{(m)}} f(s, \xi(s), u) q(ds \times du),$$

так что

$$\xi(t + \Delta) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta} a(t, \xi(t)) ds + \sum_{k=1}^m \int_t^{t+\Delta} b_k(t, \xi(t)) d\omega_k(s) + \\ + \int_t^{t+\Delta} \int_{R^{(m)}} f(t, \xi(t), u) q(ds \times du) + \sum_1^{m+2} \Theta_i(\Delta),$$

где

$$\Theta_1 = \int_t^{t+\Delta} [a(s, \xi(s)) - a(t, \xi(t))] ds, \quad \Theta_i = \int_t^{t+\Delta} [b_{i-1}(s, \xi(s)) - \\ - b_{i-1}(t, \xi(t))] d\omega_{i-1}(s), \quad i = 2, \dots, m+1, \\ \Theta_{m+2} = \int_t^{t+\Delta} \int_{R^{(m)}} [f(s, \xi(s), u) - f(t, \xi(t), u)] q(ds \times du).$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения о бесконечно малых случайных величинах. Пусть $\alpha(\Delta)$ некоторая величина, зависящая от Δ . Мы будем писать $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения: $P\{|\alpha(\Delta)| > \varepsilon\} = o(\Delta)$, $M\psi_\varepsilon(\alpha(\Delta))\alpha(\Delta) = o(\Delta)$, $M\psi_\varepsilon(\alpha(\Delta))(\alpha(\Delta))^2 = o(\Delta)$; через $\psi_\varepsilon(x)$ обозначена функция, равная 1 при $|x| \leq \varepsilon$ и равная 0 при $|x| > \varepsilon$. Легко проверить справедливость следующих утверждений:

- а) если $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$ и $\beta(\Delta) = o(\Delta)$, то $\alpha(\Delta) + \beta(\Delta) = o(\Delta)$,
- б) если $M\alpha(\Delta) = o(\Delta)$ и $D\alpha(\Delta) = o(\Delta)$, то $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$,
- в) если $\alpha(\Delta) \rightarrow 0$ по вероятности, то $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$,

г) если для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции, ограниченной вместе со своими производными, существует предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M g(\alpha(\Delta))$ и $\beta(\Delta) = o(\Delta)$, то

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} M [g(\alpha(\Delta) + \beta(\Delta)) - g(\alpha(\Delta))] = 0.$$

Таким же образом, как в теореме 2, можем подсчитать, что

$$\begin{aligned} & \log M \exp \left\{ i \left(z, \int_t^{t+\Delta} a(t, \xi(t)) ds + \sum_{k=1}^m \int_t^{t+\Delta} b_k(t, \xi(t)) dw_k(s) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^{t+\Delta} \int_{R(m)} f(t, \xi(t), u) q(ds \times du) \right) \right\} = \Delta \{ i(z, a(t, \xi(t)) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (b_k(t, \xi(t)), z)^2 + \int_{R(m)} [e^{i(z, f(t, \xi(t), u))} - 1 - i(z, f(t, \xi(t), u)) \frac{du}{|u|^{m+1}}] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая свойство г), для доказательства теоремы достаточно показать, что $\sum_{i=1}^{m+2} \Theta_i(\Delta) = o(\Delta)$. Последнее будет доказано, если мы покажем, что $\Theta_i(\Delta) = o(\Delta)$ при $i = 1, \dots, m+2$. На основании замечания 2 к теореме 3 § 2, можно утверждать, что существует такое R_1 , для которого

$$M \sup_{t \leq s \leq t+\Delta} |\xi(s) - \xi(t)|^2 \leq R_1 \Delta;$$

следовательно, $\sup_{t \leq s \leq t+\Delta} |\xi(s) - \xi(t)| \rightarrow 0$ по вероятности при $\Delta \rightarrow 0$.

Поэтому $(\Theta_1/\Delta) \rightarrow 0$ по вероятности при $\Delta \rightarrow 0$; так что $\Theta_1(\Delta) = o(\Delta)$. При $i = 2, \dots, m+1$

$$M\Theta_i = 0, D\Theta_i = \int_t^{t+\Delta} M |b_{i-1}(s, \xi(s)) - b_{i-1}(t, \xi(t))|^2 ds = o(\Delta),$$

так как $|b_k(s, \xi(s)) - b_k(t, \xi(t))| \rightarrow 0$ по вероятности ввиду непрерывности $b_k(s, x)$ и, кроме того, $|b(s, \xi(s)) - b(t, \xi(t))|^2 \leq 4K(\sup_s |\xi(s)|^2 + 1)$, причем $M \sup_s |\xi(s)|^2 < \infty$. Значит и $\Theta_i(\Delta) = o(\Delta)$ при $i = 2, \dots, m+1$. Аналогично устанавливается, что $\Theta_{m+2}(\Delta) = o(\Delta)$. Теорема доказана.

§ 5. Зависимость решений стохастических уравнений от начальных данных

Рассмотрим зависимость решения уравнения (1.8) от параметра, входящего в начальное условие. Для исследования такой зависимости требуется одна предельная теорема. Предположим, что совокупность σ -алгебр F_t , процессы $w_1(t), \dots, w_l(t)$ и мера q определены точно так же, как в § 2. Рассмотрим последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \varphi_n(t) + \int_{t_0}^t A_n(s, \xi_n(s)) ds + \\ & + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t B_k^{(n)}(s, \xi_n(s)) dw_k(s) + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} F_n(s, \xi_n(s), u) q(ds \times du), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_n(t)$, $A_n(t, x)$, $B_1^{(n)}(t, x), \dots, B_l^{(n)}(t, x)$, $F_n(t, x, u)$ — некоторые случайные функции, удовлетворяющие условиям измеримости, указанным в начале § 2.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) существует такое K , что для всех n и x

$$\begin{aligned} (T - t_0) |A_n(t, x)|^2 + \sum_{k=1}^l |B_k^{(n)}(t, x)|^2 + \int_{R^{(m)}} |F_n(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \\ \leq K(|x|^2 + 1); \end{aligned}$$

2) для каждого $C > 0$ существует такое L_C , что для всех $|x| \leq C$, $|y| \leq C$ и $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} (T - t_0) |A_n(t, x) - A_n(t, y)|^2 + \sum_{k=1}^l |B_k^{(n)}(t, x) - B_k^{(n)}(t, y)|^2 + \\ + \int_{u \in R^{(m)}} |F_n(t, x, u) - F_n(t, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L_C^2 |x - y|^2; \end{aligned}$$

3) $\varphi_n(t)$ не имеют разрывов второго рода с вероятностью 1 и

$$\sup_n \mathbf{M} \sup_t |\varphi_n(t)|^2 < \infty;$$

4) при всех t и x

$$\begin{aligned} & |\varphi_n(t) - \varphi_0(t)| + |A_n(t, x) - A_0(t, x)| + \\ & + \sum_{k=1}^l |B_k^{(n)}(t, x) - B_0^{(n)}(t, x)| + \\ & + \int_{R^{(m)}} |F_n(t, x, u) - F_0(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по вероятности.

Тогда при всех t $\xi_n(t) \rightarrow \xi_0(t)$ по вероятности.

Доказательство. Пусть $\psi_n^{(N)}(t) = 1$, если $|\varphi_n(s)| + |\varphi_0(s)| + |\xi_n(s)| + |\xi_0(s)| \leq N$ при $s \in [t_0, t]$, и $\psi_n^{(N)}(t) = 0$, если при некотором $s \in [t_0, t]$ $|\varphi_n(s)| + |\varphi_0(s)| + |\xi_n(s)| + |\xi_0(s)| > N$. Тогда

$$\begin{aligned} & (\xi_n(t) - \xi_0(t)) \psi_n^{(N)}(t) = [\varphi_n(t) - \varphi_0(t)] \psi_n^{(N)}(t) + \\ & + \psi_n^{(N)}(t) \left[\int_{t_0}^t [A_n(s, \xi_n(s)) - A_n(s, \xi_0(s))] ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t [B_k^{(n)}(s, \xi_n(s)) - \right. \\ & \quad \left. - B_k^{(n)}(s, \xi_0(s))] d\omega_k(s) + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} [F_n(s, \xi_n(s), u) - \right. \\ & \quad \left. - F_n(s, u, \xi_0(s))] q(ds \times du) + \int_{t_0}^t (A_n(s, \xi_0(s)) - \right. \\ & \quad \left. - A_0(s, \xi_0(s))) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t (B_k^{(n)}(s, \xi_0(s)) - B_k^{(0)}(s, \xi_0(s))) d\omega_k(s) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} [F_n(s, \xi_0(s), u) - F_0(s, \xi_0(s), u)] q(ds \times du) \right]. \end{aligned}$$

Взяв математические ожидания от квадратов обеих частей равенства и применяя условие 2, получаем, что при некотором H

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |(\xi_n(t) - \xi_0(t)) \psi_n^{(N)}(t)|^2 & \leq H \int_{t_0}^t \mathbf{M} |(\xi_n(s) - \xi_0(s))|^2 \psi_n^{(N)}(s) ds + \\ & + \alpha_N^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\alpha_N^{(n)}(t) = H \left[M \left(\psi_n^{(N)}(t) | \varphi_n(t) - \varphi_0(t) |^2 \right) + \int_{t_i}^t M \left(\psi_n^{(N)}(s) (|A_n(s, \xi_0(s)) - A_0(s, \xi_0(s))|^2 + \sum_{k=1}^l |B_k^{(n)}(s, \xi_0(s)) - B_k^{(0)}(s, \xi(s))|^2 + \int_{R^{(m)}} |F_n(s, \xi_0(s), u) - F_0(s, \xi_0(s), u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}) \right) \times ds \right].$$

Используя условие 4, а также неравенства

$$|\varphi_n(t) - \varphi_0(t)| |\psi_n^{(N)}(t)| \leq 2N, \\ ((T - t_0) |A_n(s, \xi_0(s)) - A_0(s, \xi_0(s))|^2 + \sum_1^l |B_k^{(n)}(s, \xi_0(s)) - B_k^{(0)}(s, \xi_0(s))|^2 + \int_{R^{(m)}} |F_n(s, \xi_0(s), u) - F_0(s, \xi_0(s), u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}) \psi_n^{(N)}(t) \leq \leq 4KN^2,$$

можем, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, показать, что $\alpha_N^{(n)}(t) \rightarrow 0$ равномерно по t при $n \rightarrow \infty$. Это позволяет из (5.2) легко вывести соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |\xi_0(t) - \xi_n(t)|^2 \psi_n^{(N)}(t) = 0;$$

следовательно,

$$P \{ |\xi_n(t) - \xi_0(t)| > \varepsilon \} \leq \frac{M \psi_n^{(N)}(t) |\xi_0(t) - \xi_n(t)|^2}{\varepsilon^2} + P \{ \psi_n^{(N)}(t) = 0 \}.$$

Но

$$P \{ \psi_n^{(N)}(t) = 0 \} \leq P \left\{ \sup_t |\varphi_n(t)| > \frac{N}{4} \right\} + P \left\{ \sup_t |\varphi_0(t)| > \frac{N}{4} \right\} + \\ + P \left\{ \sup_t |\xi_n(t)| > \frac{N}{4} \right\} + P \left\{ \sup_t |\xi_0(t)| > \frac{N}{4} \right\},$$

причём каждое слагаемое в правой части стремится к нулю равномерно относительно n при $N \rightarrow \infty$ ввиду условия 3 и замечания 1 к теореме 3 § 2. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n(t) - \xi_0(t)| > \varepsilon \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M \psi_n^{(N)}(t) |\xi_0(t) - \xi_n(t)|^2 + \\ + \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \{ \psi_n^{(N)}(t) = 0 \} = 0$$

Теорема доказана.

Пусть теперь $\xi_\alpha(t)$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(t) = x_\alpha + \int_{t_0}^t a(s, \xi_\alpha(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi_\alpha(s)) dw_k(s) + \\ + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, \xi_\alpha(s), u) q(ds \times du), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где α — числовой параметр, меняющийся в некотором интервале.

Теорема 2. Предположим, что $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $f(t, x, u)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 § 2 и, кроме того, выполняются условия:

1) существуют ограниченные и непрерывные по x производные по пространственным переменным (координатам точки x) от функций $a(t, x)$ и $b_k(t, x)$ до второго порядка включительно;

2) если (x^1, x^2, \dots, x^m) — координаты точки x , то при всех i, j существуют $f'_{x^i}(t, x, u)$, $f''_{x^i x^j}(t, x, u)$, причём

$$\int_{R^{(m)}} |f'_{x^i}(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}, \quad \int_{R^{(m)}} |f''_{x^i x^j}(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

ограничены, и для всякого x_0 , $t \in [t_0, T]$

$$u \int_{R^{(m)}} \frac{|f'_{x^i}(t, x, u) - f'_{x^i}(t, y, u)|^4}{|x - y|^4} \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{R^{(m)}} |f''_{x^i x^j}(t, x_0, u) - f''_{x^i x^j}(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 0;$$

3) существуют непрерывные $\frac{d}{d\alpha} x_\alpha$ и $\frac{d^2}{d\alpha^2} x_\alpha$. Тогда $\xi_\alpha(t)$ дважды стохастически непрерывно дифференцируемо по α (производная определяется с помощью предельного перехода в смысле сходимости по вероятности).

Доказательство. Для упрощения записи будем рассматривать процессы в одномерном пространстве и будем считать l равным 1. Из теоремы 1 вытекает, что $\xi_\alpha(t)$ непрерывна по вероятности как функция α . Пусть $\eta_\alpha(t)$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \eta_\alpha(t) = \frac{d}{d\alpha} x_\alpha + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} a(s, \xi_\alpha(s)) \eta_\alpha(s) ds + \\ + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} b(s, \xi_\alpha(s)) \eta_\alpha(s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{u \in R^{(1)}} \frac{\partial}{\partial x} f(s, \xi_\alpha(s), u) \eta_\alpha(s) q(ds \times du). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тогда, поскольку $\frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \xi_{\alpha}(t)}{\Delta\alpha} = \eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t) = & \frac{x_{\alpha+\Delta\alpha} - x_{\alpha}}{\Delta\alpha} + \int_{t_0}^t \frac{a(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s)) - a(s, \xi_{\alpha}(s))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \cdot \eta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \frac{b(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s)) - b(s, \xi_{\alpha}(s))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \eta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) d\omega(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} \frac{f(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s), u) - f(s, \xi_{\alpha}(s), u)}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \eta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) q(ds \times du), \quad (5.5) \end{aligned}$$

то, используя теорему 1, мы видим, что $\eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t) \rightarrow \eta_{\alpha}(t)$ по вероятности, когда $\Delta\alpha \rightarrow 0$; так что $\eta_{\alpha}(t) = \frac{\partial}{\partial\alpha} \xi_{\alpha}(t)$.

Аналогично устанавливается, что $\frac{\partial^2 \xi_{\alpha}(t)}{\partial\alpha^2} = \zeta_{\alpha}(t)$, где $\zeta_{\alpha}(t)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha}(t) = & \frac{d^2}{d\alpha^2} x_{\alpha} + \int_{t_0}^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(s, \xi_{\alpha}(s)) \eta_{\alpha}^2(s) ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} b(s, \xi_{\alpha}(s)) \eta_{\alpha}^2(s) d\omega(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u, s, \xi_{\alpha}(s)) \eta_{\alpha}^2(s) q(ds \times du) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} a(s, \xi_{\alpha}(s)) \zeta_{\alpha}(s) ds + \\ & + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x} b(s, \xi_{\alpha}(s)) \zeta_{\alpha}(s) d\omega(s) + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} \frac{\partial}{\partial x} f(s, \xi_{\alpha}(s), u) \zeta_{\alpha}(s) q(ds \times du). \quad (5.6) \end{aligned}$$

Стохастическая непрерывность $\eta_{\alpha}(t)$ и $\zeta_{\alpha}(t)$ также вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

Замечание 1. Так как величины x'_{α} , $\frac{a(s, x_1) - a(s, x_2)}{x_1 - x_2}$,

$$\frac{b(s, x_1) - b(s, x_2)}{x_1 - x_2} \text{ и } \int_{R^{(1)}} \left| \frac{f(s, x_1, u) - f(s, x_2, u)}{x_1 - x_2} \right|^2 \frac{du}{|u|^2}$$

ограничены, то применяя к уравнению (5.5) замечание 1 к теореме 3 § 2, можно утверждать, что

$$M \sup_t |\eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t)|^2$$

ограничено постоянной, не зависящей от α и $\Delta\alpha$.

Рассмотрим теперь процесс $\zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(t) = & \frac{1}{\Delta\alpha} \left(\frac{d}{da} x_{\alpha+\Delta\alpha} - \frac{d}{da} x_{\alpha} \right) + \varphi_{\alpha, \Delta\alpha}(t) + \\ & + \int_{t_0}^t a'_x(s, \xi_{\alpha}(s)) \zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) ds + \int_{t_0}^t b'_x(s, \xi_{\alpha}(s)) \zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) dw(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f'_x(s, \xi_{\alpha}(s), u) \zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(s) q(ds \times du), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \Delta\alpha}(t) = & \int_{t_0}^t \frac{a'_x(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s)) - a'_x(s, \xi_{\alpha}(s))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)}{\Delta\alpha} \eta_{\alpha+\Delta\alpha}(s) ds + \\ & + \int_{t_0}^t \frac{b'_x(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s)) - b'_x(s, \xi_{\alpha}(s))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)}{\Delta\alpha} \eta_{\alpha+\Delta\alpha}(s) dw(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} \frac{f'_x(s, \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s), u) - f'_x(s, \xi_{\alpha}(s), u)}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)} \frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)}{\Delta\alpha} \eta_{\alpha+\Delta\alpha}(s) q(ds \times \\ & \times du). \end{aligned}$$

Используя ограниченность величин $\frac{b'_x(s, x_1) - b'_x(s, x_2)}{x_1 - x_2}$

$$\frac{a'_x(s, x_1) - a'_x(s, x_2)}{x_1 - x_2} \text{ и } \int_{R^{(1)}} \left| \frac{f'_x(s, x_1, u) - f'_x(s, x_2, u)}{x_1 - x_2} \right|^2 \frac{du}{|u|^2},$$

легко убедиться, что при некотором H_1

$$M \sup_t |\varphi_{\alpha, \Delta\alpha}(t)|^4 \leq H_1 \int_{t_0}^T M \left[\left(\frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)}{\Delta\alpha} \right)^4 + (\eta_{\alpha+\Delta\alpha}(s))^4 \right] ds, \quad (5.8)$$

если только правая часть конечна. Покажем, что при наших предположениях

$$M \left(\frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s)}{\Delta\alpha} \right)^4$$

ограничено равномерно по α и $\Delta\alpha$. Отсюда, так как η_{α} является пределом в смысле сходимости по вероятности величины $(\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(s) - \xi_{\alpha}(s))/\Delta\alpha$, будет вытекать и равномерная ограниченность $M(\eta_{\alpha}(s))^4$.

Лемма 1. Пусть $f(s, u)$ измеримо относительно F_s и

$$\int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} < \infty.$$

Тогда существует такая постоянная \bar{H} , зависящая лишь от $(T - t_0)$, для которой

$$M \left[\int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right]^4 \leq \bar{H} \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2}.$$

Доказательство. Легко убедиться, что для ступенчатых функций

$$M \left[\int_t^{t+h} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right]^4 = \int_t^{t+h} \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} + o(h),$$

$$M \left(\int_t^{t+h} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right)^3 = \int_t^{t+h} \int_{R^{(1)}} M (f(s, y))^3 \frac{ds \times dy}{|u|^2} + o(h).$$

Поэтому, если $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, то

$$\begin{aligned} M \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} f(u, s) q(ds \times du) \right|^4 &= \sum_{k=1}^n \left(M \left| \int_{t_0}^{t_k} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right|^4 - \right. \\ &\quad \left. - M \left| \int_{t_0}^{t_{k-1}} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right|^4 \right) = 6 \sum_{k=1}^n M \left(\int_{t_0}^{t_{k-1}} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times \right. \\ &\quad \left. \times du)^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{R^{(1)}} |f(t, v)|^2 \frac{dv dt}{|v|^2} \right) + 4 \sum_{k=1}^n M \int_{t_0}^{t_{k-1}} \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times du \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{R^{(1)}} (f(t, v))^3 \frac{dv}{v^2} + o(t_{k+1} - t_k) + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^T M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} + o(\max_k (t_{k+1} - t_k)) \right). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} M \left| \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right|^4 & \leq 6 \int_{t_0}^T M \left(\int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times \right. \\ & \times du)^2 \int_{R^{(1)}} |f(t, v)|^2 \frac{dv}{|v|^2} \Big) dt + 4 \int_{t_0}^T \left(M \int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times \right. \\ & \times du) \int_{R^{(1)}} (f(t, v))^3 \frac{dv}{|v|^2} \Big) dt + \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера, находим:

$$\begin{aligned} M \left(\int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right)^4 & \leq \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} + \\ & + 6 \sqrt{\left(\int_{t_0}^T M \left(\int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right)^4 dt \right) \left(\int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} \right)} + \\ & + 4 \left[\int_{t_0}^T M \left(\int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right)^4 dt \right]^{\frac{1}{4}} \left[\int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2} \right]^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$A = \sup_{t_0 < t < T} M \left[\int_{t_0}^t \int_{R^{(1)}} f(s, u) q(ds \times du) \right]^4, \quad B = \int_{t_0}^T \int_{R^{(1)}} M |f(s, u)|^4 \frac{ds du}{|u|^2},$$

то из предыдущего неравенства получаем:

$$\frac{A}{B} \leq 6(T - t_0)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{2}} + 4(T - t_0)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \leq 8(T - t_0)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{2}} + 3$$

(так как $2(T-t_0)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (T-t_0)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}} + 1$).

Следовательно,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3 + 16(T-t_0)} - 4\sqrt{(T-t_0)}.$$

Отсюда и вытекает доказательство леммы для произвольных ступенчатых функций. Общий случай может быть получен предельным переходом от ступенчатых функций.

Используя только что доказанную лемму и теорему 4 § 2 гл. 2, легко вывести из уравнения (5.5), что существует не зависящая от α и $\Delta\alpha$ постоянная C такая, что

$$M(\eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t))^4 \leq C \left[\int_{t_0}^t M(\eta_{\alpha, \Delta\alpha}(s))^4 ds + (\sup_{\alpha} x_{\alpha}')^4 \right]$$

и значит

$$M(\eta_{\alpha, \Delta\alpha}(t))^4 \leq (\sup_{\alpha} x_{\alpha}')^4 e^{C(t-t_0)};$$

таким образом $M \sup_t |\varphi_{\alpha, \Delta\alpha}(t)|^2$ из (5.8) ограничен равномерно по α и $\Delta\alpha$. Применяя теперь к уравнению (5.7) замечание 1 к теореме 3 § 2, можем утверждать, что имеет место замечание 2.

Замечание 2. Если x_{α} , $a(t, x)$, $b(t, x)$, $f(t, x, u)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, а $\xi_{\alpha, \Delta\alpha}(t)$ удовлетворяет уравнению (5.7), то существует постоянная C_2 , не зависящая от α и $\Delta\alpha$, такая, что

$$M|\zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(t)|^2 \leq C_2;$$

поэтому и для

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \bar{\xi}_{\alpha}(t) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \zeta_{\alpha, \Delta\alpha}(t)$$

(предел в смысле сходимости по вероятности) будет выполняться неравенство:

$$M\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \bar{\xi}_{\alpha}(t)\right)^2 \leq C_2.$$

Теорема 3. Если $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до второго порядка включительно, $\xi_{\alpha}(t)$ — решение уравнения (5.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 2, то функция

$$\Phi(\alpha) = M g(\xi_\alpha(t))$$

будет дважды непрерывно дифференцируемой функцией α . Для доказательства теоремы используем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi_0$ по вероятности и $\sup_n M \xi_n^2 < \infty$, тогда $M \xi_n \rightarrow M \xi_0$.

Доказательство. Положим $\psi_N(t) = 1$ при $|t| \leq N$, $\psi(t) = N + 1 - |t|$ при $t \in [N, N + 1]$, и $\psi_N(t) = 0$ при $|t| > N$. Тогда $\xi_n \psi_N(\xi_n)$ ограничено величиной $N + 1$ и сходится по вероятности к $\xi_0 \psi_N(\xi_0)$. Поэтому

$$M \xi_n \psi_N(\xi_n) \rightarrow M \xi_0 \psi_N(\xi_0).$$

Но

$$\begin{aligned} |M \xi_n - M \xi_0| &\leq |M \xi_n \psi_N(\xi_n) - M \xi_0 \psi_N(\xi_0)| + \\ &+ M |\xi_n| (1 - \psi_N(\xi_n)) + M |\xi_0| (1 - \psi_N(\xi_0)) \leq \\ &\leq |M \xi_n \psi_N(\xi_n) - M \xi_0 \psi_N(\xi_0)| + \sqrt{M \xi_0^2 \cdot M (1 - \psi_N(\xi_0))} + \\ &+ \sqrt{M \xi_n^2 M (1 - \psi_N(\xi_n))} \leq |M \xi_n \psi_N(\xi_n) - M \xi_0 \psi_N(\xi_0)| + \\ &+ \sqrt{M \xi_0^2 P\{|\xi_0| > N\}} + \sqrt{M \xi_n^2 P\{|\xi_n| > N\}} \leq \\ &\leq |M \xi_n \psi_N(\xi_n) - M \xi_0 \psi_N(\xi_0)| + \frac{2}{N} \sup_n M \xi_n^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и вытекает доказательство леммы.

Применяя доказанную лемму к равенству

$$\frac{\Phi(\alpha + \Delta\alpha) - \Phi(\alpha)}{\Delta\alpha} = M \frac{g(\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t)) - g(\xi_\alpha(t))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \xi_\alpha(t)} \frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \xi_\alpha(t)}{\Delta\alpha}$$

(возможность применения вытекает из замечания 1 к предыдущей теореме), получаем:

$$\Phi'(\alpha) = M g'_x(\xi_\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \xi_\alpha(t).$$

Применяя далее лемму 2 к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'(\alpha + \Delta\alpha) - \Phi'(\alpha)}{\Delta\alpha} &= M \frac{g_x(\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t)) - g_x(\xi_\alpha(t))}{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \xi_\alpha(t)} \frac{\xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \xi_\alpha(t)}{\Delta\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \\ &- \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) + M g'_x(\xi_\alpha(t)) \frac{1}{\Delta\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \xi_{\alpha+\Delta\alpha}(t) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \xi_\alpha(t) \right) \end{aligned}$$

(возможность применения вытекает из замечания 2), получим:

$$\Phi''(\alpha) = M g'_{xx}(\xi_\alpha(t)) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \xi_\alpha(t) \right)^2 + M g'_x(\xi_\alpha(t)) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \xi_\alpha(t). \quad (5.9)$$

Так как

$$\sup_\alpha \{ M \{ (g'_x(\xi_\alpha(t)) \xi'_\alpha(t))^2 + (g'_x(\xi_\alpha(t)) \xi''_\alpha(t))^2 \} \} < \infty$$

и выражение, стоящее под знаком математического ожидания в правой части (5.9) стохастически непрерывно по α , можем заключить на основании леммы 2, что $\Phi''(\alpha)$ непрерывно по α . Теорема доказана.

§ 6. Дифференциальные уравнения для определения распределений марковских процессов

Для определения распределения величины $\xi(t)$ достаточно знать $Mg(\xi(t))$ в том случае, когда $g(x)$ достаточно гладкие ограниченные функции. Пусть для $t_1 \in [t_0, t]$ $\xi_{x, t_1}(t)$ обозначает решение уравнения

$$\begin{aligned} \xi_{x, t_1}(t) = & x + \int_{t_1}^t a(s, \xi_{x, t_1}(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_1}^t b_k(s, \xi_{x, t_1}(s)) dw_k(s) + \\ & + \int_{t_1}^t \int_{u \in R(m)} f(s, \xi_{x, t_1}(s), u) q(ds \times du) \end{aligned}$$

(относительно коэффициентов $a(t, x)$, $b_k(t, x)$, $f(t, x, u)$ будем предполагать выполненными условия теоремы 3 предыдущего параграфа). Тогда, если $g(x)$ также удовлетворяет условиям теоремы 3 предыдущего параграфа, функция

$$\Phi(x, t_1) = Mg(\xi_{x, t_1}(t))$$

будет дважды непрерывно дифференцируемая функция пространственных переменных. Покажем, что $\Phi(x, t_1)$ будет удовлетворять некоторому интегро-дифференциальному уравнению. Предварительно докажем одно вспомогательное предложение.

Лемма. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$, ограниченной вместе со своими производными до второго порядка включительно, выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{Mg(\xi_{x, t_1}(t)) - g(x)}{t - t_1} = & (a(t_1, x), \vec{\nabla}) g(t_1, x) + \\ & + \sum_{k=1}^l (b_k(t_1, x), \vec{\nabla})^2 g(t_1, x) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{R^{(m)}} (g(t_1, f(t_1, x, u)) - g(t_1, x) - (f, \nabla) g) \frac{du}{|u|^{m+1}}, \quad (6.1)$$

где $\vec{\nabla}$ — вектор с координатами $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$, а x^1, x^2, \dots, x^m — координаты вектора x .

Доказательство. При наших предположениях

$$\begin{aligned} \xi_{x, t_1}(t) = & x + \int_{t_1}^t a(t_1, x) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_1}^t b_k(t_1, x) d\omega_k(s) + \\ & + \int_{t_1}^t \int_{u \in R^{(m)}} f(t_1, x, u) q(ds \times du) + \Theta(t - t_1), \end{aligned}$$

где $\Theta(t - t_1)$ случайная величина такая, что $\Theta(t - t_1) = o(t - t_1)$ (это было установлено при доказательстве теоремы 3 § 4). На основании свойства г) § 4 можно утверждать, что

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{1}{t - t_1} (g(\xi_{x, t_1}(t)) - \Theta(t - t_1)) - g(x) = \lim_{t \rightarrow t_1} (g(\xi_{x, t_1}(t)) - g(x)),$$

если последний существует для всякой функции $g(x)$, удовлетворяющей условию леммы.

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{1}{t - t_1} (g(\xi_{x, t_1}(t)) - \Theta(t - t_1)) - g(x)$$

совпадает с правой частью (6.1). Найдем сначала

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{1}{t - t_1} \mathbf{M} \left[g \left(x + \int_{t_1}^t \int_{R^{(m)}} f(t_1, x, u) q(ds \times du) \right) - g(x) \right] = \\ = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{1}{t - t_1} \mathbf{M} \left[g \left(x + \int_{t_1}^t \int_{R^{(m)}} f(t_1, x, u) q(ds \times du) \right) - g(x) - \right. \\ \left. - \sum g_{x^i}^i(x) \int_{t_1}^t \int f^i(t_1, x, u) q(ds \times du) \right], \end{aligned}$$

так как $\mathbf{M} \int_{t_1}^t \int_{R^{(m)}} f^i(t_1, x, u) q(ds \times du)$, а $f^i(t, x, u)$ — координаты

ты вектора $f(t, x, u)$. Рассмотрим сначала случай, когда $f(t_1, x, u)$ является ступенчатой функцией по u : $f(t_1, x, u)$ отлична от нуля лишь при $u \in \bigcup_{k=1}^N B_k$ и постоянна на каждом из множеств B_k . Так как

$$\mathbf{P} \{p(\bigcup_{k=1}^N B_k) > 1\} = o(t - t_1),$$

то при $u_k \in B_k$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left[g \left(x + \int_{t_1}^t f(t_1, x, u) q(ds \times du) \right) - g(x) - \right. \\ & - \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(x)}{\partial x^i} \int_{t_1}^t \int f^i(t_1, x, u) q(ds \times du) \Big] = \sum_{k=1}^N \left\{ g \left(x + \left[1 - \right. \right. \right. \\ & - (t - t_1) \int_{\bigcup_k B_k} \frac{du}{|u|^{m+1}} \Big] f(t_1, x, u_k) \Big) - g(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}(x) \left[1 - \right. \\ & \left. \left. \left. - (t - t_1) \int_{\bigcup_k B_k} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] f^i(t_1, x, u_k) \right\} \int_{B_k} \frac{du}{|u|^{m+1}} (t - t_1) o(t - t_1). \end{aligned}$$

Из этого соотношения легко вывести, что и в общем случае

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left[g \left(x + \int_{t_0}^t f(t_1, x, u) q(ds \times du) \right) - g(x) - \right. \\ & - \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(x)}{\partial x^i} \int_{t_0}^t \int f^i(t_1, x, u) q(ds \times du) \Big] = (t - t_1) \int_{R^{(m)}} \left[g \left(x + \right. \right. \\ & \left. \left. + f(t_1, x, u) \right) - g(x) - \sum_{i=1}^m g'_{x^i}(x) f^i(t_1, x, u) \right] \frac{du}{|u|^{m+1}} + o(t - t_1). \end{aligned}$$

Чтобы получить доказательство леммы, нужно еще показать, что

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{1}{t - t_1} \left(\mathbf{M} g \left(x + \int_{t_1}^t a(t_1, x) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_1}^t b_k(t_1, x) dw_k(s) \right) - \right.$$

$$-g(x) = \sum_{i=1}^m a^i(t_1, x) \frac{\partial g(x)}{\partial x^i} + \sum_{1 \leq i, j \leq m} \sum_{k=1}^l b_k^i(t_1, x) b_k^j(t_1, x) g_{x^i x^j}''(x)$$

равномерно по x в каждой ограниченной области. Это вытекает из соотношения:

$$\begin{aligned} M \left[g \left(x + \int_{t_1}^t a(t_1, x) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_1}^t b_k(t_1, x) dw_k(s) \right) - g(x) \right] = \\ = \frac{1}{[2n(t-t_1)]^{\frac{l}{2}}} \int \left[g(x + a(t_1, x)(t-t_1) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^l b_k(t_1, x) \alpha_k - g(x) \right] e^{-\frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k^2}{2(t-t_1)}} d\alpha_1 \dots d\alpha_l. \end{aligned}$$

Объединяя эти результаты, и получаем доказательство леммы.

Теорема. Пусть $\Phi(t_1, x) = Mg(\xi_{t_1, x}(t))$, где $\xi_{t_1, x}(t)$ и g удовлетворяют перечисленным в начале этого параграфа условиям. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial t_1} = \sum_{i=1}^m a^i(t_1, x) \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^l b_k^i(t_1, x) b_k^j(t_1, x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} + \\ + \int_{R^{(m)}} \left[\Phi(t_1, x + f(t_1, x, u)) - \Phi(t_1, x) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^m f^i(t_1, x, u) \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right] \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Доказательство. При $t_1 < t_2 < t$

$$Mg(\xi_{t_1, x}(t) / \xi_{t_1, x}(t_2)) = \Phi(t_2, \xi_{t_1, x}(t_2)).$$

Значит

$$\Phi(t_1, x) = M\Phi(t_2, \xi_{t_1, x}(t_2)).$$

Поэтому

$$\frac{\Phi(t_1 - \Delta, x) - \Phi_1(t_1, x)}{\Delta} = M \frac{\Phi(t_1, \xi_{t_1 - \Delta, x}(t_1)) - \Phi(t_1, x)}{\Delta}. \quad (6.3)$$

Заметим, что на основании теоремы 3 § 5 функция $\Phi(t_1, x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Таким образом, к (6.3) можно применить лемму этого параграфа, что и доказывает теорему.

Глава 4. О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРОЦЕССАМ МАРКОВА

§ 1. Постановка задачи

Пусть на σ -алгебре \mathbf{B} подмножеств некоторого множества X с элементами x заданы две меры μ_1 и μ_2 . Говорят, что мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 , если для всякого $A \in \mathbf{B}$, для которого $\mu_1(A) = 0$, также и $\mu_2(A) = 0$. Если μ_1 и μ_2 конечны, то теорема Родона—Никодима утверждает, что для всякой меры μ_2 , абсолютно непрерывной относительно меры μ_1 , существует такая \mathbf{B} — измеримая функция $p(x)$, что для всякого $A \in \mathbf{B}$

$$\mu_2(A) = \int_A p(x) \mu_1(dx). \quad (1.1)$$

Функция $p(x)$ называется производной или плотностью меры μ_2 относительно μ_1 и обозначается $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)$. Мера μ_2 в этом случае называется дифференцируемой по мере μ_1 .

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, определенный на $[t_0, T]$ и принимающий значения из $R^{(m)}$. Обозначим через $\Phi_m([t_0, T])$ множество всех функций $x(t)$, определенных на $[t_0, t]$ и принимающих значения из $R^{(m)}$. Если $F_m[t_0, T]$ минимальная σ -алгебра подмножеств $\Phi_m[t_0, T]$, содержащая все цилиндрические множества, то процессу $\xi(t)$ соответствует на $F_m[t_0, T]$ некоторая мера μ , такая, что $\mu(A) = P\{\xi(t) \in A\}$ для всякого цилиндрического множества $A \in F_m[t_0, T]$. нас будет в этой главе интересовать вопрос: при каких условиях мера μ_2 , соответствующая процессу $\xi_2(t)$, будет абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 , соответствующей процессу $\xi_1(t)$. Кроме того, если μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 , будет вычисляться $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$.

В этом случае $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ будет функционалом на пространстве $\Phi_m[t_0, T]$, измеримым относительно $F_m[t_0, T]$ и определенным с

точностью до множеств меры μ_1 нуль. Поэтому величина $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ будет измерима относительно исходного поля вероятностей. Знание величины $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ позволяет написать формулу (1.1) в следующем виде: если $\Psi_B(x(t))$ характеристическая функция множества B из $F_m[t_0, T]$, то

$$\mu_2(B) = M \Psi_B(\xi_2(t)) = M \Psi_B(\xi_1(t)) \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)). \quad (1.2)$$

Поэтому всюду будем ограничиваться вычислением величины $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$. Процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в дальнейшем будут предполагаться марковскими процессами, являющимися решениями стохастических уравнений вида (1.7) гл. 3.

Изучение абсолютной непрерывности мер, соответствующих случайным процессам, представляет интерес в связи с следующими соображениями.

Во-первых, среди различных свойств случайных процессов особо важную роль играют свойства, которыми процесс обладает почти наверно; если же мера μ_2 , соответствующая процессу $\xi_2(t)$, будет абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 , соответствующей процессу $\xi_1(t)$, то тогда $\xi_2(t)$ будет обладать почти наверно всеми теми свойствами, которыми обладает почти наверно процесс $\xi_1(t)$.

Во-вторых, знание $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ позволяет вычислять по формуле (1.2) вероятности различных событий, относящихся к процессу $\xi_2(t)$, если только мы можем вычислять распределения функционалов от процесса $\xi_1(t)$.

Наконец, знание $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ необходимо при решении различных статистических задач методами, основанными на отношении правдоподобия: задач о выборе между гипотезами и задач об оценке неизвестного параметра распределения.

§ 2. Леммы

Установим некоторые вспомогательные предложения, касающиеся абсолютной непрерывности мер вообще и мер, соответствующих случайным процессам в частности.

Лемма 1. Пусть μ_1 и μ_2 конечные меры на B , и существует последовательность B_n , такая, что для всякого $A \in B_n$ $\mu_2(A \setminus B_n) \rightarrow 0$. Тогда, если мера $\mu_2^{(n)}(A) = \mu_2(A \cap B_n)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_1^{(n)}(A) = \mu_1(A \cap B_n)$ при каждом n , то μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 , и при $x \in B_n$

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x).$$

Доказательство. Если $\mu_1(A) = 0$, то $\mu_1(A \cap B_n) = 0$, а значит и $\mu_2(A \cap B_n) = 0$. Но $\mu_2(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A \cap B_n)$ и следовательно $\mu_2(A) = 0$, т. е. μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 . Теперь легко установить, что почти для всех по мере μ_1 x принадлежащих B_n $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x)$, так как

$$\int_A \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) - \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(x) \right) \mu_1(dx) = 0 \text{ для всех } A \subset B_n.$$

Пусть \mathbf{B}_x — σ -алгебра подмножеств из X , \mathbf{B}_y — σ -алгебра подмножеств из Y , $Z = X \times Y$ — множество пар (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$; \mathbf{B}_Z — минимальная σ -алгебра подмножеств Z , содержащая все подмножества $B_Z = B_x \times B_y$, $B_x \in \mathbf{B}_x$, $B_y \in \mathbf{B}_y$. Пусть, далее, μ — мера на L_x , ν — мера на \mathbf{B}_y . Обозначим через $\mu \times \nu$ меру на \mathbf{B}_Z такую, что

$$\mu \times \nu(B_x \times B_y) = \mu(B_x) \nu(B_y).$$

Эту меру мы будем называть произведением мер μ и ν . Для произведений мер справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 2. Если μ_1 и μ_2 меры на \mathbf{B}_x , а ν_1 и ν_2 меры на \mathbf{B}_y , причем μ_2 и ν_2 соответственно абсолютно непрерывны относительно μ_1 и ν_1 , тогда мера $\mu_2 \times \nu_2$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_1 \times \nu_1$, и

$$\frac{d\mu_2 \times \nu_2}{d\mu_1 \times \nu_1}(x, y) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\nu_1}(y).$$

Пусть опять во множествах X и Y выделены σ -алгебры подмножеств \mathbf{B}_x и \mathbf{B}_y . Отображение T множества X во множество Y называется $(\mathbf{B}_x \times \mathbf{B}_y)$ -измеримым, если полный прообраз каждого множества из \mathbf{B}_y будет принадлежать \mathbf{B}_x .

Лемма 3. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ процессы, определенные на $[t_0, T]$ и принимающие значения из $R^{(m)}$, а T измеримое $F_m[t_0, T] \times \times F_m[t_0, T]$ отображение $F_m[t_0, T]$ в $F_m[t_0, T]$. Пусть $\eta_1(t) = T\xi_1(t)$, $\eta_2(t) = T\xi_2(t)$, μ_i — меры, соответствующие процессам $\xi_i(t)$ на $F_m[t_0, T]$, ν_i — меры соответствующие процессам $\eta_i(t)$ на $F_m[t_0, T]$. Тогда, если μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 , то ν_2 абсолютно непрерывна относительно ν_1 и

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1}(\eta_1(t)) M \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) / \eta_1(t), t \in [t_0, T] \right).$$

Доказательство. Для каждого множества $A \in F_m[t_0, T]$;

обозначая через $\Psi_A(x(t))$ его характеристическую функцию, можем записать:

$$\begin{aligned} M \phi_A(\eta_1(t)) M \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) / \eta_1(t), t \in [t_0, T] \right) &= M \Psi_A(\eta_1(t)) \times \\ &\times \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) = M \Psi_{T-A}(\xi_1(t)) \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) = \\ &= M \Psi_{T-A}(\xi_2(t)) = M \Psi_A(\eta_2(t)). \end{aligned}$$

Из этого равенства и вытекает доказательство леммы.

Основной метод, которым мы будем пользоваться для установления абсолютной непрерывности мер, соответствующих случайным процессам, заключается в следующем. Построим последовательности более простых процессов $\xi_n^{(1)}(t)$ и $\xi_n^{(2)}(t)$, которые сходились бы к $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Эти процессы будем подбирать таким образом, чтобы можно было подсчитать $\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_n^{(1)}(t))$, где $\mu_i^{(n)}$ — меры, соответствующие процессам

$\xi_n^{(i)}(t)$. Естественно ожидать, что тогда при $n \rightarrow \infty$ $\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_n^{(1)}(t))$

будет сходиться к $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$. Для обоснования такого подхода нам понадобится лемма.

Лемма 4. Пусть последовательность процессов $\xi_n^{(1)}(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ сходится по вероятности к $\xi^{(1)}(t)$, а последовательность $\xi_n^{(2)}(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ сходится по вероятности к $\xi^{(2)}(t)$. Предположим, что мера $\mu_2^{(n)}$, соответствующая процессу $\xi_n^{(2)}(t)$, и мера $\mu_1^{(n)}$, соответствующая процессу $\xi_n^{(1)}(t)$, абсолютно непрерывны одна относительно другой, причем величины

$$\log \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}}(\xi_n^{(2)}(t)) \text{ и } \log \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_n^{(1)}(t))$$

сходятся по вероятности к некоторым величинам ρ_{12} и ρ_{21} соответственно. Тогда меры μ_1 и μ_2 , соответствующие процессам $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$, будут абсолютно непрерывны одна относительно другой, причем

$$\rho_{12} = \log \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(\xi^{(2)}(t)) \text{ и } \rho_{21} = \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi^{(1)}(t)).$$

Доказательство. Установим, например, абсолютную непрерывность μ_2 относительно μ_1 . Для всякого множества $A \in \mathcal{F}_m[t_0, T]$ можем записать

$$\mu_1^{(n)}(A) = \int_A \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} d\mu_2^{(n)} \geq e^{-N} \mu_2^{(n)}(A) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_A \left(\frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} - e^{-N} \right) d\mu_2^{(n)} \geq e^{-N} \mu_2^{(n)}(A) + \\
& + \int_{\left(\frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} < e^{-N} \right)} \left(\frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} - e^{-N} \right) d\mu_2^{(n)} \geq \\
& \geq e^{-N} \mu_2^{(n)}(A) - e^{-N} P \left\{ \left| \log \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} (\xi_2^{(n)}(t)) \right| > N \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mu_2^{(n)}(A) \leq e^N \mu_1^{(n)}(A) + P \left\{ \left| \log \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}} (\xi_2^{(n)}(t)) \right| > N \right\}.$$

Значит для любого $A \in F_m[t_0, T]$, для которого $\mu_t^{(n)}(A) \rightarrow \mu_t(A)$, будем иметь:

$$\mu_2(A) \leq e^N \mu_1(A) + P \{ |\rho_{12}| \geq N \}.$$

Но для всякого множества A , для которого $\mu_1(A) = 0$, можно указать монотонно возрастающую последовательность цилиндрических множеств C_k такую, что

$$\mu_t^{(n)}(C_k) \rightarrow \mu_t(C_k), \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \supset A \text{ и } \mu_1(C_m) = \varepsilon,$$

где ε наперед заданное сколь угодно малое положительное число. Тогда

$$\mu_2(A) \leq e^N \varepsilon + P \{ |\rho_{12}| \geq N \}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и N можем сделать вывод, что $\mu_2(A) = 0$. Абсолютная непрерывность μ_2 относительно μ_1 установлена. Заменой индексов 1 на 2 из предыдущего получаем абсолютную непрерывность μ_1 относительно μ_2 . Покажем теперь, что

$$\rho_{21} = \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1} (\xi_1(t)).$$

Пусть C — цилиндрическое множество, для которого $\Psi_C(\xi_1^{(n)}(t)) \rightarrow \psi_C(\xi_1(t))$ по вероятности, а Ψ_C — характеристическая функция множества C . Тогда

$$M \psi_C(\xi_2^{(n)}(t)) = M \psi_C(\xi_1^{(n)}(t)) \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)).$$

Так как

$$\psi_C(\xi_2^{(n)}(t)) \rightarrow \psi_C(\xi_2(t)) \text{ и } \psi_C(\xi_1^{(n)}(t)) \rightarrow \psi_C(\xi_1(t)),$$

на основании леммы Фату

$$\begin{aligned} M \psi_C(\xi_2(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} M \psi_C(\xi_2^{(n)}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \psi_C(\xi_1^{(n)}(t)) \times \\ &\times \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)) \geq M \psi_C(\xi_1(t)) e^{\rho_{21}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$M \psi_C(\xi_1(t)) \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) - e^{\rho_{21}} \right) \geq 0.$$

Из этого неравенства легко получить, что для всякого множества A из $F_m[t_0, T]$ будет выполняться:

$$M \psi_A(\xi_1(t)) \left(\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) - e^{\rho_{21}} \right) \geq 0.$$

Так что $e^{\rho_{21}} \leq \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ почти наверное. Чтобы показать, что $\rho_{21} = \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$, достаточно установить, что

$$M e^{\rho_{21}} \geq M \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) = 1.$$

Обозначим через $g_N(t)$ функцию, равную t при $|t| \leq N$ и равную $N \operatorname{sign} t$ при $|t| > N$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g_N \left(\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)) \right) = M g_N(e^{\rho_{21}}).$$

Но

$$\begin{aligned} 1 - M g_N \left(\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)) \right) &\leq \int_{\frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}} > N} \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}} d\mu_1^{(n)} = \\ &= P \left\{ \left| \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)) \right| > N \right\} \leq P \left\{ \left| \log \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}}(\xi_1^{(n)}(t)) \right| > \log N \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$1 - M e^{\rho_{21}} \leq 1 - M g_N(e^{\rho_{21}}) \leq P \{ |\rho_{12}| \geq \log N \},$$

откуда и вытекает неравенство $1 - M e^{\rho_{21}} \leq 0$; так что

$$\rho_{21} = \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)).$$

Аналогично устанавливается, что $\rho_{12} = \log \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(\xi_2(t))$. Лемма доказана.

Заметим для дальнейшего следующее. Так как в этой главе мы интересуемся только мерами, соответствующими случайным процессам, то мы можем заменять один процесс другим, если конечномерные распределения этих процессов совпадают.

§ 3. Некоторые достаточные условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих однородным процессам с независимыми приращениями

Пусть на отрезке $[0, T]$ заданы два однородных процесса с независимыми приращениями $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$; характеристические функции этих процессов имеют вид:

$$\begin{aligned} M e^{i(z, \xi_j(t))} = \exp \left\{ t \left[i(z, a_j) - \frac{1}{2} (A_j z, z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{|x| < 1} (e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x) \Pi_j(dx) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{|x| > 1} (e^{i(z, x)} - 1) \Pi_j(dx) \right] \right\}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположим, что процесс $\xi_1(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) = \bar{a}t + \sum_{k=1}^l b_k^{(1)} w_k(t) + \int_0^t \int_{|u| < 1} f(u) q(ds \times du) + \\ + \int_0^t \int_{|u| > 1} f(u) p(ds \times du) \end{aligned} \quad (3.2)$$

(из теоремы 2 § 4 гл. 3 вытекает существование таких векторов $\bar{a}_1, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_l^{(1)}$, причём векторы $b_j^{(1)}$ попарно ортогональны, и такой функции $f(u)$, что процесс (3.2) будет иметь характеристическую функцию (3.1) при $t > 0$).

Теорема. Пусть выполнены условия:

- 1) линейные преобразования A_1 и A_2 совпадают;
 - 2) Π_2 и Π_1 абсолютно непрерывны одна относительно другой
- и $\rho(x) = \frac{d\Pi_2}{d\Pi_1}(x)$ обладает свойствами:

$$\text{а) } \int_{|\rho(x)-1| < \frac{1}{2}} (1 - \rho(x))^2 \Pi_1(dx) < \infty$$

$$\text{б) } \int_{|\rho(x)-1| > \frac{1}{2}} |1 - \rho(x)| \Pi_1(dx) < \infty$$

- в) существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, что

$$a_2 - a_1 + \int_{|x| < 1} (1 - \rho(x)) \Pi_1(dx) = \sum_{k=1}^l \alpha_k b_k^{(1)}.$$

Тогда меры μ_1 и μ_2 , соответствующие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, абсолютно непрерывны одна относительно другой, причём,

$$\log \frac{d\mu_2}{d\mu_1} (\xi_1(t)) = \bar{a} T + \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k(T) + \\ + \int_0^T \int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} \log \rho(f(u)) q(ds \times du) + \int_0^T \int_{|\rho(f(u))-1| > \frac{1}{2}} \log \rho(f(u)) p(ds \times du), \quad (3.3)$$

где

$$\bar{a} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \alpha_k^2 + \int_{|\rho(f(u))-1| > \frac{1}{2}} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \\ + \int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} (1 - \rho(f(u)) + \log \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \quad (3.4)$$

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, отметим, что формулы (3.3) и (3.4) имеют смысл, так как

$$\int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} |\log \rho(f(u))|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq 4 \int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} |\rho(f(u)) - 1|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = \\ = 4 \int_{|\rho(x)-1| < \frac{1}{2}} (\rho(x) - 1)^2 \Pi_1(dx) < \infty, \\ \int_{|\rho(f(u))-1| > \frac{1}{2}} \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq 2 \int_{|\rho(f(u))-1| > \frac{1}{2}} |\rho(f(u)) - 1| \frac{du}{|u|^{m+1}} = \\ = 2 \int_{|\rho(x)-1| > \frac{1}{2}} |\rho(x) - 1| \Pi_1(dx) < \infty,$$

и

$$\left| \int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} (1 - \rho(f(u)) + \log \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right| \leq$$

$$\leq 2 \int_{|\rho(f(u))-1| < \frac{1}{2}} (1 - \rho(f(u)))^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 2 \int_{|\rho(x)-1| < \frac{1}{2}} (1 - \rho(x))^2 \Pi_1(dx) < \infty,$$

(во всех трёх интегралах делается замена переменной: $f(u) = x$, при этом используется соотношение $\Pi_1(A) = \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}}$).

Доказательство теоремы будет вытекать из следующих лемм, условия теоремы в которых будут предполагаться выполненными.

Лемма 1. Пусть \bar{p} пуассоновская мера с независимыми значениями, определённая для всех борелевских множеств A из $[t_0, T] \times R^{(m)}$, для которых

$$\int_{(t,u) \in A} \rho(f(u)) \frac{dt du}{|u|^{m+1}} < \infty,$$

причем

$$M \bar{p}(A) = \int_{(t,u) \in A} \rho(f(u)) \frac{dt du}{|u|^{m+1}}.$$

Обозначим $\bar{q}(A) = \bar{p}(A) - M \bar{p}(A)$ и

$$\bar{a}_2 = a_2 + \int_{\substack{|u| < 1 \\ |f(u)| > 1}} \rho(f(u)) f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} - \int_{\substack{|f(u)| < 1 \\ |u| > 1}} \rho(f(u)) f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}}.$$

Тогда процесс

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_2(t) = & \bar{a}_2 t + \sum_{k=1}^l b_k w_k(t) + \int_0^t \int_{|u| < 1} f(u) \bar{q}(ds \times du) + \\ & + \int_0^t \int_{|u| > 1} f(u) \bar{p}(ds \times du) \end{aligned} \quad (3.5)$$

будет иметь такие же распределения, как и процесс $\xi_2(t)$. Для доказательства этой леммы нужно подсчитать характеристическую функцию процесса $\tilde{\xi}_2(t)$, что делается точно так, как в доказательстве теоремы 2 § 4 гл. 3. Получим

$$\begin{aligned} M \exp \{i(z, \tilde{\xi}_2(t))\} = & \exp \left[t \left(i(\bar{a}_2, z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l (b_k, z)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{|u| < 1} (e^{i(z, f(u))} - 1 - i(z, f(u))) \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_{|u|>1} (e^{t(z, f(u))} - 1) \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \Big] .$$

Затем в интегралах производится замена $f(u) = x$, учитывается при этом, что $\rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}}$ заменится на $\rho(x) \Pi_1(dx) = \Pi_2(dx)$.

Лемма 2. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно; положим

$$\xi_1^{(\varepsilon)}(t) = \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) p(ds \times du); \quad \xi_2^{(\varepsilon)} = \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du). \quad (3.6)$$

Если $\mu_1^{(\varepsilon)}$ и $\mu_2^{(\varepsilon)}$ меры, соответствующие процессам $\xi_1^{(\varepsilon)}(t)$ и $\xi_2^{(\varepsilon)}(t)$, то эти меры абсолютно непрерывны одна относительно другой, причём

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_2^{(\varepsilon)}}{d\mu_1^{(\varepsilon)}}(\xi_1^{(\varepsilon)}(t)) &= \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) + \\ &+ \int_{|u|>\varepsilon} T(1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_1^{(\varepsilon)}}{d\mu_2^{(\varepsilon)}}(\xi_2^{(\varepsilon)}(t)) &= - \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) \bar{p}(ds \times du) - \\ &- T \int_{|u|>\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство. Введём величины:

$$\begin{aligned} \xi_n^k &= \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|<\varepsilon} f(u) p(ds \times du) \cdot g_1 \left(\int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|>\varepsilon} p(ds \times du) \right); \\ \eta_n^k &= \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \cdot g_1 \left(\int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|>\varepsilon} \bar{p}(ds \times du) \right), \end{aligned}$$

где $g_1(t) = t$ при $t \leq 1$ и $g_1(t) = 0$ при $t > 1$. Так как

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \eta_n^{(k)} - \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \right| > 0 \right\} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \xi_n^{(k)} - \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{k+1}{n}T} \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \right| > 0 \right\} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} \xi_n^{(j)} - \int_0^{\frac{kT}{n}} \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \right| > 0 \right\} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} \eta_n^{(j)} - \int_0^{\frac{kT}{n}} \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \right| > 0 \right\} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, если $\eta_n(t) = \sum_{k < nt} \eta_n^{(k)}$, $\xi_n(t) = \sum_{k < nt} \xi_n^{(k)}$, то $\eta_n(t) \rightarrow \xi_2^{(\varepsilon)}(t)$, $\xi_n(t) \rightarrow \xi_1^{(\varepsilon)}(t)$ по вероятности. Величины $\xi_n^{(k)}$ независимы и одинаково распределены.

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_n^{(k)} \in A \right\} = \frac{T}{n} \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{f(u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\},$$

если $0 \notin A$,

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_n^{(k)} = 0 \right\} = 1 - \frac{T}{n} \int_{|u|>\varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{|u|>\varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}.$$

Величины $\eta_n^{(k)}$ также независимы и одинаково распределены,

$$\mathbf{P} \left\{ \eta_n^{(k)} \in A \right\} = \frac{T}{n} \int_{f(u) \in A} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{f(u) \in A} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\},$$

если $0 \notin A$,

$$P \left\{ \eta_n^{(k)} = 0 \right\} = 1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \\ \times \exp \left\{ - \frac{T}{n} \int_{|u| < \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}.$$

Обозначим через $\varphi_n(x)$ плотность распределения величины $\eta_n^{(k)}$ относительно распределения величины $\xi_n^{(k)}$. Из выписанных выше соотношений вытекает, что

$$\varphi_n(x) = \rho(x) \exp \left\{ - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} (\rho(f(u)) - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}$$

при $x \neq 0$,

$$\varphi_n(0) = \frac{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}}{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}}.$$

Так как $\xi_n(t)$ полностью выражается через $\xi_n^{(k)}$, причём $\xi_n^{(k)}$ однозначно определяются по $\xi_n(t)$, и $\xi_n^{(k)}$ независимы между собой, то на основании леммы 3 § 2

$$\frac{dv_n}{d\mu_n}(\xi_n(t)) = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_n(\xi_n^{(k)}),$$

и значит

$$\log \frac{dv_n}{d\mu_n}(\xi_n(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \log \varphi_n(\xi_n^{(k)})$$

(через v_n и μ_n обозначены меры, соответствующие процессам $\eta_n(t)$ и $\xi_n(t)$). Таким образом, если доопределить $\rho(0) = 1$ и ввести функцию $\Psi_0(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $\Psi_0(x) = 1$ при $x = 0$, получим:

$$\log \frac{dv_n}{d\mu_n}(\xi_n(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \log \rho(\xi_n^{(k)}) - \\ - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} (\rho(f(u)) - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \Psi_0(\xi_n^{(k)})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \Psi_0(\xi_n^{(k)}) \log \frac{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}}{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}}.$$

Легко убедиться, при этом, учитывая значения $P\{\xi_n^{(k)}=0\}$, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_0(\xi_n^{(k)}) \rightarrow 1$$

по вероятности, а

$$\begin{aligned} n \log \frac{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}}{1 - \frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \exp \left\{ -\frac{T}{n} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}} &\rightarrow \\ &\rightarrow T \int_{|u| > \varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$\log \rho(\xi_n^{(k)}) = \int_{\frac{T}{n}k}^{\frac{T}{n}(k+1)} \int_{|u| > \varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du),$$

если

$$\int_{\frac{T}{n}k}^{\frac{T}{n}(k+1)} \int_{|u| > \varepsilon} \log p(ds \times du) \leq 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_0^{n-1} \log \rho(\xi_n^{(k)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^T \int_{|u| > \varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) \right| > 0 \right\} = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Поэтому и

$$\sum_0^{n-1} \log \rho(\xi_n^{(k)}) \rightarrow \int_0^T \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du)$$

по вероятности. Итак, мы установили, что по вероятности

$$\begin{aligned} \log \frac{d\gamma_n}{\mu_n}(\xi_n(t)) &\rightarrow \int_0^T \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) + \\ &+ T \int_{|u|>\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Точно такими же рассуждениями устанавливается, что по вероятности

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_n}{d\gamma_n}(\eta_n(t)) &\rightarrow \\ \rightarrow - \int_0^T \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) \bar{p}(ds \times du) - T \int_{|u|>\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) на основании леммы 4 § 2 заключаем, что меры $\mu_1^{(s)}$ и $\mu_2^{(s)}$ абсолютно непрерывны одна относительно другой и что справедливы формулы (3.7) и (3.8).

Лемма 3. Пусть $w(t)$ процесс броуновского движения на отрезке $[0, T]$, а $\eta_1(t) = w(t) + \gamma_1 t$ и $\eta_2(t) = w(t) + \gamma_2 t$, где γ_1 и γ_2 — некоторые вещественные постоянные. Если μ_1^* и μ_2^* меры, соответствующие процессам $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, то они абсолютно непрерывны одна относительно другой и

$$\log \frac{d\mu_2^*}{d\mu_1^*}(\eta_1(t)) = (\gamma_2 - \gamma_1) w(T) - \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)^2 T.$$

Доказательство. Пусть $\eta_1^{(n)}(t) = \eta_1\left(\frac{kT}{n}\right)$, если $t \in \left(\frac{kT}{n}, \frac{k+1}{n}T\right)$, и $\eta_2^{(n)}(t) = \eta_2\left(\frac{kT}{n}\right)$, если $t \in \left(\frac{kT}{n}, \frac{k+1}{n}T\right)$. Обозначим через $\mu_1^{(n)}$ и $\mu_2^{(n)}$ меры, соответствующие процессам $\eta_1^{(n)}(t)$ и $\eta_2^{(n)}(t)$. Так как $\eta_1^{(n)}(t)$ и $\eta_2^{(n)}(t)$ являются одинаковыми функциями от

$$\Delta_{nk}^{(1)} = \eta_1^{(n)}\left(\frac{k+1}{n}T\right) - \eta_1^{(n)}\left(\frac{k}{n}T\right),$$

$$\Delta_{nk}^{(2)} = \eta_2^{(n)}\left(\frac{k+1}{n}T\right) - \eta_2^{(n)}\left(\frac{k}{n}T\right),$$

а $\Delta_{nk}^{(1)}$ и $\Delta_{nk}^{(2)}$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение со средним $\gamma_1 \frac{T}{n}$, $\gamma_2 \frac{T}{n}$ и дисперсией $\frac{T}{n}$, то

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\eta_1^{(n)}(t)) &= \prod_{k=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{\left(\Delta_{nk}^{(1)} - \frac{\gamma_2 T}{n}\right)^2}{2 \frac{T}{n}} + \frac{\left(\Delta_{nk}^{(1)} - \frac{\gamma_1 T}{n}\right)^2}{2 \frac{T}{n}} \right\} = \\ &= \prod_{k=0}^n \exp \left\{ (\gamma_2 - \gamma_1) \Delta_{nk}^{(1)} + \frac{\gamma_1^2 T}{2n} - \frac{\gamma_2^2 T}{2n} \right\} = \\ &= \exp \left\{ (\gamma_2 - \gamma_1) w(T) - \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{2} T \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\log \frac{d\mu_2^{(n)}}{d\mu_1^{(n)}}(\eta_1^{(n)}(t)) = (\gamma_2 - \gamma_1) w(T) - \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{2} T.$$

Аналогично подсчитывается, что

$$\log \frac{d\mu_1^{(n)}}{d\mu_2^{(n)}}(\eta_2^{(n)}(t)) = (\gamma_1 - \gamma_2) w(T) - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{2} T.$$

Для доказательства леммы остаётся воспользоваться леммой 4 § 2.

Перейдём теперь к доказательству теоремы. Пусть $\xi_1(t)$ определяется формулой (3.2), а $\xi_2(t)$ формулой (3.5). Положим

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1^{(\varepsilon)}(t) &= \bar{a}_1 t + \sum_{k=1}^l b_k^{(1)} w_k(t) + \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) p(ds \times du) - \\ &\quad - t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}}, \\ \bar{\xi}_2^{(\varepsilon)}(t) &= \bar{a}_2 t + \sum_{k=1}^l b_k^{(1)} w_k(t) + \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) - \\ &\quad - t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \rho(f(u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + t \int_{|u|\leq\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned}$$

Используя условие в), можно переписать выражение для $\bar{\xi}_2^{(\varepsilon)}(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2^{(e)}(t) = & \bar{a}_1 t + \sum_{k=1}^l b_k^{(1)}(w_k(t) + \alpha_k t) + \\ & + \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) - t \int_{\varepsilon < |u| < 1} f(u) \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta_1(t)$ — процесс в $l + m$ -мерном пространстве с компонентами

$$\left[w_1(t), \dots, w_l(t), \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) p(ds \times du) \right],$$

а $\zeta_2(t)$ — процесс в том же пространстве с компонентами

$$\left[w_1(t) + \alpha_1 t, \dots, w_l(t) + \alpha_l t, \int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) \bar{p}(ds \times du) \right]$$

(у обоих процессов последняя компонента m -мерная, а остальные — одномерные). Так как компоненты процессов независимы и меры, соответствующие одной и той же компоненте этих процессов, абсолютно непрерывны одна относительно другой, то обозначая через μ_{ζ_i} меру, соответствующую процессу $\zeta_i(t)$, а через $\nu_1, \dots, \nu_l, \nu'_1, \dots, \nu'_l, \mu_1^{(e)}, \mu_2^{(e)}$ — меры, соответствующие процессам $w_1(t), \dots, w_l(t), w_1(t) + \alpha_1 t, \dots, w_l(t) + \alpha_l t$ (относительно $\mu_i^{(e)}$ см. условие леммы 2), на основании леммы 2 из § 2 и лемм 2 и 3 этого параграфа будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\zeta_i}}{d\mu_{\zeta_i}}(\zeta_i(t)) = & \exp \left\{ \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k(T) - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^l \alpha_k^2 + \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) + T \int_{|u|>\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\bar{\xi}_2^{(e)}(t)$ и $\bar{\xi}_1^{(e)}(t)$ получаются одинаковым преобразованием из $\zeta_2(t)$ и $\zeta_1(t)$, то, если $\bar{\mu}_1^{(e)}$ и $\bar{\mu}_2^{(e)}$ — меры, соответствующие процессам $\bar{\xi}_1^{(e)}(t)$ и $\bar{\xi}_2^{(e)}(t)$, то на основании леммы 3 § 2

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mu}_2^{(e)}}{d\bar{\mu}_1^{(e)}}(\bar{\xi}_1^{(e)}(t)) = & M \left(\exp \left\{ \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k(T) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^l \alpha_k^2 + T \int_{|u|>\varepsilon} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) \Big| (\bar{\xi}_1^{(e)}(t), t \in (0, T) \Big). \quad (3.11)$$

Но выражение, которое стоит под знаком условного математического ожидания, полностью определяется значениями $\bar{\xi}_1^{(e)}(t)$, так как, складывая скачки $\bar{\xi}_1^{(e)}(t)$, можно получить

$$\int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) p(ds \times du),$$

а как следует из леммы 2

$$\int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} \log \rho(f(u)) p(ds \times du)$$

является функционалом от процесса

$$\int_0^t \int_{|u|>\varepsilon} f(u) p(ds \times du);$$

вычитая из $\bar{\xi}_1^{(e)}(t)$ скачки и фиксированную функцию, получим $\sum_{k=1}^l b_k^{(1)} w_k(t)$; из этого выражения ввиду ортогональности $b_k^{(1)}$

можно определить $w_k(t)$. Следовательно, условное математическое ожидание величины в (3.11) совпадает с самой величиной. Таким образом,

$$\begin{aligned} \log \frac{d\bar{\mu}_2^{(e)}}{d\bar{\mu}_1^{(e)}}(\bar{\xi}_1^{(e)}(t)) &= \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k(T) - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^l \alpha_k^2 + \\ &+ \int_0^T \int_{\substack{|u|>\varepsilon \\ |\rho(f(u))-1|>\frac{1}{2}}} \log \rho(f(u)) p(ds \times du) + \int_0^T \int_{\substack{|u|>\varepsilon \\ |\rho(f(u))-1|<\frac{1}{2}}} \log \rho(f(u)) q(ds \times du) + \\ &+ T \int_{\substack{|u|>\varepsilon \\ |\rho(f(u))-1|>\frac{1}{2}}} (1 - \rho(f(u))) \frac{du}{|u|^{m+1}} + T \int_{\substack{|u|>\varepsilon \\ |\rho(f(u))-1|<\frac{1}{2}}} (1 - \rho(f(u))) \end{aligned}$$

$$+ \log \rho(f(u)) \Big| \frac{du}{|u|^{m+1}}. \quad (3.12)$$

Аналогичный подсчёт показывает, что

$$\begin{aligned} \log \frac{\bar{d}_{\mu_1}^{(\varepsilon)}(\bar{\xi}_2^{(\varepsilon)}(t))}{\bar{d}_{\mu_2}^{(\varepsilon)}(\bar{\xi}_2^{(\varepsilon)}(t))} = & - \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k(T) - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^l \alpha_k^2 - \\ & - \int_0^T \int_{|u| > \varepsilon} \log \rho(f(u)) \bar{p}(ds \times du) - \int_0^T \int_{\substack{|u| > \varepsilon \\ |\rho(f(u)) - 1| < \frac{1}{2}}} \log \rho(f(u)) \bar{q}(ds \times du) + \\ & + T \int_{\substack{|u| > \varepsilon \\ |\rho(f(u)) - 1| > \frac{1}{2}}} (\rho(f(u)) - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \\ & + T \int_{\substack{|u| > \varepsilon \\ |\rho(f(u)) - 1| < \frac{1}{2}}} [\rho(f(u)) - 1 - \log \rho(f(u))] \frac{du}{|u|^{m+1}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\bar{\xi}_1^{(\varepsilon)}(t)$ и $\bar{\xi}_2^{(\varepsilon)}(t)$ сходятся по вероятности к $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а выражения (3.12) и (3.13) также имеют предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле сходимости по вероятности (причём (3.12) сходится по вероятности к (3.3)), то, применяя лемму 4 § 2, и получим доказательство теоремы.

§ 4. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих процессам Маркова

Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ являются решениями стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) = & \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t a_i(s, \xi_i(s)) ds + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^t b_k(s, \xi_i(s)) dw_k(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} f_i(s, \xi_i(s), u) q(ds \times du) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} f_i(s, \xi_i(s), u) p(ds \times du), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям теорем существования и единственности § 3 гл. 3. Рассмотрим два семейства однородных процессов с независимыми приращениями

$$\begin{aligned} \eta_{t,x}^{(i)}(s) = & \int_t^s a_i(t, x) d\tau + \sum_{k=1}^l b_k(t, x) [w_k(s) - w_k(t)] + \\ & + \int_t^s \int_{|u| < 1} f_i(t, x, u) q(d\tau \times du) + \int_t^s \int_{|u| > 1} f_i(t, x, u) p(d\tau \times du), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

определённых при каждом $t \in [t_0, T]$ и $x \in R^{(m)}$ на $[t, T]$.

Возьмём разбиение отрезка $[t_0, T]$: $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$; обозначим через $\xi_i^{(N)}(t)$ процессы, определяемые соотношениями:

$$\xi_i^{(N)}(t_0) = \xi_i(t_0),$$

$$\xi_i^{(N)}(t) = \xi_i^{(N)}(t_k) + \eta_{t_k, \xi_i^{(N)}(t_k)}^{(i)}(t)$$

при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Предположим, что выполняются условия:

1) существует такая функция $\rho(t, x, y) > 0$, что для всякого $A \in R^{(m)}$

$$\int_{f_3(t, x, u) \in A} \frac{du}{|u|^{m+1}} = \int_{f_1(t, x, u) \in A} \rho(t, x, f_1(t, x, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

причём для всех t и x

а)

$$\begin{aligned} \delta(t, x) = & \int_{|1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))| < \frac{1}{2}} [1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))]^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty, \\ & |1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \gamma(t, x) = & \int_{|1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))| > \frac{1}{2}} |1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))| \frac{du}{|u|^{m+1}} < \infty; \\ & |1 - \rho(t, x, f_1(t, x, u))| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) существуют такие $\alpha_1(t, x), \dots, \alpha_l(t, x)$, что

$$a_2(t, x) - a_1(t, x) \neq \int_{|u| < 1} (f_1(t, x, u) - f_2(t, x, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^l \alpha_k(t, x) b_k(t, x);$$

3) распределения $\xi_1(t_0)$ и $\xi_2(t_0)$ абсолютно непрерывны относительно друг друга и плотность распределения $\xi_2(t_0)$ относительно распределения $\xi_1(t_0)$ будет $p_0(x)$.

Обозначим далее через $\mu_{x, t_k}^{(i)}$ меру, соответствующую процессу $\eta_{t_k, x}^{(i)}(t)$ на $F_m[t_k, t_{k+1}]$. Тогда при высказанных предположениях меры $\mu_{x, t_k}^{(1)}$ и $\mu_{x, t_k}^{(2)}$ будут абсолютно непрерывны одна относительно другой на основании теоремы § 3; на основании этой же теоремы

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_{x, t_k}^{(2)}}{d\mu_{x, t_k}^{(1)}}(\eta_{t_k, x}^{(1)}(t)) = & \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \alpha_j^2(t_k, x) + \int_{R^{(m)}} [1 - \rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u))] + \right. \\ & \left. + \phi(t_k, x, u) \log \rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u)) \right] \times \frac{du}{|u|^{m+1}} \times (t_{k-1} - t_k) + \\ & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u)) \phi(t_k, x, u) q(ds \times du) + \\ & + \sum_{j=1}^l \alpha_j(t_k, x) [w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)] + \\ & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u)) (1 - \phi(t_k, x, u)) p(ds \times du), \\ \psi(t, x, u) = & \begin{cases} 1, & \text{если } |\rho(t, x, f_1(t, x, u)) - 1| \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 4(|\rho(t, x, f_1(t, x, u)) - 1| - \frac{1}{2}), & \text{если} \\ \frac{1}{2} < |\rho(t, x, f_1(t, x, u)) - 1| \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{если } |\rho(t, x, f_1(t, x, u)) - 1| \geq \frac{3}{4}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величина

$$\log \frac{d\mu_{x, t_k}^{(1)}}{d\mu_{x, t_k}^{(2)}}(\eta_{t_k, x}^{(2)}(t))$$

выписывается при помощи той же формулы, только вместо $\rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u))$ в эту формулу нужно подставить $\frac{1}{\rho(t_k, x, f_2(t_k, x, u))}$, а вместо $\alpha_j(t_k, x)$ нужно подставить $-\alpha_j(t_k, x)$. Обозначим множитель, стоящий в правой части (4.3) возле $(t_{k+1} - t_k)$ через $\alpha(t_k, x)$, а соответствующую величину в выражении для

$$\log \frac{d\mu_{x, t_k}^{(1)}}{d\mu_{x, t_k}^{(2)}}(\eta_{t_k, x}^{(2)}(t))$$

через $\bar{\alpha}(t_k, x)$.

Установим некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Пусть $\mu_1^{(N)}$ и $\mu_2^{(N)}$ меры, соответствующие процессам $\xi_1^{(N)}(t)$ и $\xi_2^{(N)}(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_1^{(N)}}{d\mu_2^{(N)}}(\xi_1^{(N)}(t)) &= \log p_0(\xi_1(t_0)) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k))(t_{k+1} - t_k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^l \alpha_j(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k)) [W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), f_1(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), u)) \psi(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), u) q(ds \times \\ &\times du) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), f_1(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), u)) (1 - \\ &- \psi(t_k, \xi_1^{(N)}(t_k), u)) p(ds \times du). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Формула для $\log \frac{d\mu_1^{(N)}}{d\mu_2^{(N)}}(\xi_1^{(N)}(t))$ получается из формулы (4.4), если в ней заменить p_0 на $\frac{1}{p_0}$, $\rho(t_k, x, f_1(t_k, x, u))$ на $1/\rho(t_k, x, f_2(t_k, x, u))$ и $\xi_1^{(N)}(t)$ на $\xi_2^{(N)}(t)$.

Доказательство. Пусть A_k произвольные цилиндрические множества из $F_m|t_k, t_{k+1}]$. Положим для каждого борелевского множества $A \subset R^{(m)}$

$$\mu_{x, t_k}^{(l)}(A_k; A) = P\{\eta_{t_k, x}^{(l)}(t) \in A_k; \eta_{t_k, x}^{(l)}(t_{k+1}) \in A\}.$$

Если $A = \bigcap_{k=0}^{N-1} A_k$, то из того, что $\xi_1^{(N)}(t)$ являются марковскими процессами, вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu_i^{(N)}(A) = & \int_{R^{(m)}} P\{\xi_i(t_0) \in dx_0\} \int_{R^{(m)}} \mu_{x_0, t_0}^{(i)}(A_0, dx_1) \dots \\ & \dots \int_{R^{(m)}} \mu_{x_{N-2}, t_{N-2}}(A_{N-2}, dx_N) \times \mu_{x_{N+1}, t_{N+1}}(A_{N+1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.5), используя абсолютную непрерывность относительно друг друга мер $P\{\xi_1(t_0) \in A\}$ и $P\{\xi_2(t_0) \in A\}$, а также мер $\mu_{x_k, t_k}^{(1)}$ и $\mu_{x_k, t_k}^{(2)}$, легко вывести, что

$$\frac{d\mu_2^{(N)}}{d\mu_1^{(N)}}(x(t)) = p_0(x(t_0)) \prod_{k=0}^{N-1} \frac{d\mu_{x_k, t_k}^{(2)}}{d\mu_{x_k, t_k}^{(1)}}(x(t)), \text{ где } x_k = x(t_k).$$

Следовательно,

$$\log \frac{d\mu_2^{(N)}}{d\mu_1^{(N)}}(x(t)) = \log p_0(x(t_0)) + \sum_{k=0}^{N-1} \log \frac{d\mu_{x(t_k), t_k}^{(2)}}{d\mu_{x(t_k), t_k}^{(1)}}(x(t)). \quad (4.6)$$

Для того, чтобы получить (4.4), достаточно подставить в (4.6) вместо $x(t)$ процесс $\xi_i^{(N)}(t)$ и воспользоваться формулой (4.3).

Лемма 2. Пусть $\bar{\xi}_i^{(N)}(t) = \xi_i^{(N)}(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Тогда $\bar{\xi}_i^{(N)}(t) - \xi_i^{(N)}(t) \rightarrow 0$ по вероятности при $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

Доказательство. Из определения $\xi_i^{(N)}(t)$ вытекает, что $\xi_i^{(N)}(t_k)$ удовлетворяют соотношениям (3.2) гл. 3, если в этих соотношениях заменить $t_k^{(n)}$ на t_k , $a(t, x)$ на $a_i(t, x)$, $f(t, x, u)$ на $f_i(t, x, u)$ и $\xi_k^{(n)}$ на $\xi_i^{(N)}(t_k)$. Поэтому на основании следствия из теоремы существования § 3 гл. 3 можно утверждать, что конечномерные распределения $\bar{\xi}_i^{(N)}(t)$ будут сходиться при $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$ к конечномерным распределениям процесса $\xi_i(t)$. Поэтому $\bar{\xi}_i^{(N)}(t)$ ограничено по вероятности равномерно относительно N и t . Так как при $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \xi_i^{(N)}(t) - \bar{\xi}_i^{(N)}(t) = & a_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t))(t - t_k) + \sum_{j=1}^l b_j(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t))[\omega_j(t) - \\ & - \omega_j(t_k)] + \int_{t_k}^t \int_{|u| < 1} f_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t), u) q(ds \times du) + \\ & + \int_{t_k}^t \int_{|u| > 1} f_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t), u) p(ds \times du), \end{aligned} \quad (4.7)$$

то при $t - t_k \rightarrow 0$ $\xi_i^{(N)}(t) - \bar{\xi}_i^{(N)}(t) \rightarrow 0$ по вероятности. Сходимость первых двух слагаемых к нулю очевидна. Далее

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_k}^t \int_{|u|>1} f_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t), u) p(ds \times du) \right| > 0 \right\} \leq \\ \leq \mathbf{P} \{ p([t_k, t] \times \{|u| > 1\}) > 0 \} \rightarrow 0$$

при $t - t_k \rightarrow 0$. Наконец, если $g_N(x) = 1$ при $|x| \leq N$ и $g_N(x) = 0$ при $|x| > N$, то

$$\mathbf{M} \left(\int_{t_k}^t \int_{|u| \leq 1} f_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t), u), q_N(\bar{\xi}_i^{(N)}(t)) q(ds \times du) \right)^2 \leq \\ \leq (t - t_k) \sup_{\substack{|x| \leq N \\ |u| \leq 1}} |f_i(t_k, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \rightarrow 0$$

при $t - t_k \rightarrow 0$, а вероятность:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \int_{t_k}^t \int_{|u| \leq 1} f_i(t_k, \bar{\xi}_i^{(N)}(t), u) (1 - g_N(\bar{\xi}_i^{(N)}(t))) q(ds \times du) \right| > 0 \right\} \leq \\ \leq \mathbf{P} \{ |\bar{\xi}_i^{(N)}(t)| > N \}$$

можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого N . Лемма доказана.

Установим теперь теорему, дающую достаточные условия для абсолютной непрерывности мер μ_2 и μ_1 , соответствующих процессам $\xi_2(t)$ и $\xi_1(t)$, введенным в начале этого параграфа.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) $q(t, x, y) > 0$ и непрерывно по совокупности переменных,
2) $\alpha_1(t, x), \dots, \alpha_l(t, x), \alpha(t, x), \bar{\alpha}(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных,

3) для каждого $C > 0$, $\sup_{\substack{t_0 \leq t \leq T \\ |x| \leq C}} \delta(t, x) < \infty$, а коэффициенты

уравнений (4.1) удовлетворяют условиям теорем существования и единственности § 3 гл. 3.

Тогда меры μ_1 и μ_2 будут абсолютно непрерывны одна относительно другой, причём

$$\log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) = \log p_0(\xi_1(t_0)) + \int_{t_0}^T \alpha(t, \xi_1(t)) dt + \\ + \sum_{k=1}^l \int_{t_0}^T \alpha_k(t, \xi_1(t)) d\omega_k(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} \log \rho(t, \xi_1(t), f_1(t, \xi_1(t), u)) \psi_1(t, \xi_1(t), u) q(ds \times du) + \\
& + \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} \log \rho(t, \xi_1(t), f_1(t, \xi_1(t), u)) (1 - \psi_1(t, \xi_1(t), u)) p(ds \times du). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Аналогичная формула с заменой p_0 на $\frac{1}{p_0}$, α_j на $-\alpha_j$, α на $\bar{\alpha}$ и q, f_1 на $\frac{1}{p}, f_2$ имеет место и для $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(\xi_2(t))$.

Доказательство. Как было показано в теореме существования § 3 гл. 3, если $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$, то можно указать подпоследовательность N' и процессы

$$\tilde{\xi}_i^{(N')}(t), \tilde{\xi}_i^{(N')}(t), \tilde{w}_1^{(N')}(t), \dots, \tilde{w}_l^{(N')}(t), \tilde{\xi}^{(N')}(t),$$

которые имеют при каждом N' такие же совместные конечномерные распределения, как и процессы

$$\bar{\xi}_i^{(N')}(t), \bar{\xi}_i^{(N')}(t), w_1(t), \dots, w_l(t),$$

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} u q(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p(ds \times du),$$

и сходятся при $N' \rightarrow \infty$ к некоторым процессам

$$\tilde{\xi}_i(t), \tilde{\xi}_i(t), \tilde{w}_1(t), \dots, \tilde{w}_l(t), \tilde{\zeta}(t);$$

причём $\tilde{\xi}_i(t)$ будут иметь такие же конечномерные распределения, как и $\xi_i(t)$. Из леммы 2 вытекает, что $\tilde{\xi}_i(t) = \tilde{\xi}_i(t)$.

Так как $\tilde{\xi}_i^{(N')}(t), \tilde{w}_j^{(N')}(t), \tilde{\zeta}^{(N')}(t)$ и $\xi_i^{(N')}(t), (w_j(t), \zeta(t))$ имеют одинаковые совместные конечномерные распределения, то на основании леммы 1 величина $\log \frac{d\mu_2^{(N')}}{d\mu_1^{(N')}} \left(\tilde{\xi}_1^{(N')}(t) \right)$ будет определяться формулой (4.4), если в этой формуле заменить $\xi_1^{(N')}(t)$ на $\tilde{\xi}_1^{(N')}(t), w_j(t)$ на $\tilde{w}_j^{(N')}(t), p$ и q на $\tilde{p}^{(N')}$ и $\tilde{q}^{(N')}$, а $\tilde{p}^{(N')}$ и $\tilde{q}^{(N')}$ определяются по $\tilde{\xi}^{(N')}(t)$ точно таким же образом, как в лемме 4 § 3 гл. 3, p_0 и q_0 определяются по $\zeta_0(t)$. При $N' \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{N'-1} \alpha(t_k, \tilde{\xi}_1^{(N')}(t_k)) (t_{k+1} - t_k) \rightarrow \int_{t_0}^T \alpha(s, \tilde{\xi}_1(s)) ds,$$

по вероятности ввиду непрерывности $\alpha(t, x)$. Используя теорему § 3 гл. 2 и непрерывность $\alpha_j(t, x)$, легко показать, что

$$\sum_{k=0}^{N'-1} \alpha_j(t_k, \xi_1^{(N')}(t_k)) [\tilde{w}_j^{(N')}(t_{k+1}) - \tilde{w}_j^{(N')}(t_k)] \rightarrow \int_{t_0}^T \alpha_j(s, \xi_1(s)) d\tilde{w}_j(s)$$

по вероятности.

Наконец, используя лемму 5 § 3 гл. 3, точно таким же образом, как в доказательстве теоремы существования § 3 гл. 3, можно установить сходимость правой части (3.7) к правой части уравнения, которому удовлетворяет $\xi(t)$; можно показать при этом, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N'-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, \xi_1^{(N')}(t_k), f_1(t_k, \xi_1^{(N')}(t_k), u)) \psi_1(t_k, \tilde{\xi}_1^{(N')}(t_k), \\ & u) \times \tilde{q}^{(N')}(ds \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} \log \rho(t, \xi_1(t), f_1(t, \xi_1(t), u)) \psi_1(t, \tilde{\xi}_1(t), \\ & u) \times \tilde{q}(ds \times du), \\ & \sum_{k=0}^{N'-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{R^{(m)}} \log \rho(t_k, \xi_1^{(N')}(t_k), f_1(t_k, \tilde{\xi}_1^{(N')}(t_k), u)) (1 - \psi_1(t_k, \xi_1^{(N')}(t_k), u)) \times \\ & \times \tilde{p}^{(N')}(ds \times du) \rightarrow \int_{t_0}^T \int_{R^{(m)}} \log \rho(t, \xi_1(t), f_1(t, \xi_1(t), u)) (1 - \\ & - \psi_1(t, \xi_1(t), u)) \tilde{p}(dt \times du) \end{aligned}$$

по вероятности, где \tilde{p} и \tilde{q} точно так определяются по $\xi(t)$, как в лемме 4 § 3 гл. 3; p_0 и q_0 определяются по $\xi_0(t)$. Таким образом $\log \frac{d\mu_1^{(N')}}{d\mu_1^{(N')}}(\tilde{\xi}_1^{(N')}(t))$ сходится по вероятности к правой части (4.8), если там заменить $\xi_1(t)$ на $\tilde{\xi}_1(t)$, $w_j(t)$ на $\tilde{w}_j(t)$, p и q на \tilde{p} и \tilde{q} .

Аналогично устанавливается, что $\log \frac{d\mu_1^{(N')}}{d\mu_2^{(N')}}(\tilde{\xi}_2^{(N')}(t))$ также

сходится по вероятности к случайной величине, получающейся из (4.8) заменой $\xi_1(t)$ на $\check{\xi}_2(t)$, $w_j(t)$ на $\check{w}_j(t)$, p и q на \check{p} и \check{q} , ρ на $\frac{1}{\check{\rho}}$, ρ_0 на $\frac{1}{\check{\rho}_0}$, α_j на $-\alpha_j$ и α на $\bar{\alpha}$.

Применяя лемму 4 § 2 и учитывая, что $\xi_i(t)$, $w_j(t)$, p , q и $\check{\xi}_i(t)$, $\check{w}_j(t)$, \check{p} , \check{q} имеют одинаковые распределения, получаем доказательство теоремы.

Глава 5. ОДНОМЕРНЫЕ ДИФFUЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Предварительные замечания

В § 1 гл. 3 уже рассматривались стохастические уравнения для диффузионных процессов. Если коэффициенты диффузии и переноса диффузионного процесса будут $\sigma^2(t, x)$ и $a(t, x)$, то диффузионный процесс находится в виде решения уравнения

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw(t); \quad (1.1)$$

если процесс рассматривается на отрезке $[t_0, T]$ и в точке t_0 задается начальное условие $\xi(t_0)$, то уравнение (1.1) можно записать в проинтегрированной форме:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \xi(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s). \quad (1.2)$$

Из теоремы 3 § 2 гл. 2 вытекает, что $\int_{t_0}^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s)$ яв-

ляется с вероятностью 1 непрерывным процессом, если только $\sigma(s, \xi(s))$ является с вероятностью 1 ограниченным процессом (например в том случае, когда $\sigma(s, x)$ является ограниченной функцией или $\sigma(s, x)$ ограничено в каждой ограниченной области изменения x , а $\xi(t)$ с вероятностью 1 ограниченная функция t). В дальнейшем мы будем рассматривать только такие уравнения, у которых при каждом $C > 0 \sup_{|x| < C, s \in [t_0, T]} (|a(s, x)| + |\sigma(s, x)|) < \infty$, а решения уравнения (1.2) будут предполагаться ограниченными. Тогда такие решения, как вытекает из формулы (1.2), будут с вероятностью 1 непрерывными. Из доказанных в главе 3 теорем вытекают следующие теоремы о существовании и единственности решений уравнения (1.2).

Теорема 1. Если выполнены условия:

1) $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ определены и измеримы по совокупности переменных при $s \in [t_0, T]$, $x \in (-\infty, \infty)$;

2) существует такое K , что

$$(a(s, x))^2 + (\sigma(s, x))^2 \leq K(1 + x^2);$$

3) для каждого $C > 0$ существует такое L_C , что при $|x| \leq C$, $|y| \leq C$

$$|a(s, x) - a(s, y)| + |\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| \leq L_C |x - y|,$$

тогда, какова бы ни была случайная величина $\xi(t_0)$, не зависящая от $\omega(t)$, уравнение (1.2) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное решение.

Эта теорема вытекает из теоремы 4 § 2 гл. 3.

Теорема 2. Пусть $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ непрерывны по совокупности переменных при $s \in [t_0, T]$, $x \in (-\infty, \infty)$ и выполняется условие 2 теоремы 1. Тогда, какова бы ни была случайная величина $\xi(t_0)$, не зависящая от $\omega(t)$, уравнение (1.2) имеет с вероятностью 1 непрерывное решение. Эта теорема является следствием теоремы существования § 3 гл. 3.

Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два процесса, удовлетворяющие уравнению

$$\xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t a_i(s, \xi_i(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \xi_i(s)) d\omega(s), \quad (1.3)$$

$i = 1, 2$

и μ_i — мера, соответствующая процессу $\xi_i(t)$ на $F_1[t_0, T]$. Тогда из теоремы § 4 гл. 4 вытекает теорема 3.

Теорема 3. Если $a_i(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и распределения $\xi_1(t_0)$ и $\xi_2(t_0)$ абсолютно непрерывны одно относительно другого, причём плотность распределения $\xi_2(t_0)$ относительно распределения $\xi_1(t_0)$ равна $\varphi(x)$, то меры μ_1 и μ_2 будут абсолютно непрерывны одна относительно другой; при этом

$$\begin{aligned} \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t)) &= \log \varphi(\xi_1(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{a_2(t, \xi_1(t)) - a_1(t, \xi_1(t))}{\sigma(t, \xi_1(t))} d\omega(t) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{a_2(t, \xi_1(t)) - a_1(t, \xi_1(t))}{\sigma(t, \xi_1(t))} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим уравнение (1.2), у которого коэффициенты ограничены в каждой ограниченной области изменения x . Пусть $\xi(t)$ — решение этого уравнения, а $f(t, x)$ — функция, имеющая непрерывные производные $f'_x(t, x)$, $f''_{xx}(t, x)$ и монотонная по x при каждом t . Положим $\eta(t) = f(t, \xi(t))$. Тогда из теоремы 5, § 2, гл. 2 вытекает, что $\eta(t)$ будет удовлетворять соотношению:

$$d\eta(t) = [f'_t(t, \xi(t)) + f'_x(t, \xi(t))a(t, \xi(t)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, \xi(t))\sigma^2(t, \xi(t))]dt + \\ + f_x(t, \xi(t))\sigma(t, \xi(t))dw(t).$$

Если $\xi(t) = g(t, \eta(t))$ (существование такой функции $g(t, x)$ вытекает из монотонности $f(t, x)$), то $\eta(t)$ является решением уравнения:

$$d\eta(t) = \bar{a}(t, \eta(t))dt + \bar{\sigma}(t, \eta(t))dw(t), \quad (1.5)$$

$$\bar{a}(t, x) = f'_t(t, g(t, x)) + f'_x(t, g(t, x))a(t, g(t, x)) + \\ + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, g(t, x))\sigma^2(t, g(t, x)), \quad (1.6)$$

$$\bar{\sigma}(t, x) = f'_x(t, g(t, x))\sigma(t, g(t, x)). \quad (1.7)$$

Так как между решениями уравнений (1.1) и (1.5) установлено взаимно однозначное соответствие, то вопросы существования и единственности решения уравнений (1.1) и (1.4) решаются одновременно.

Теорема 4. Пусть $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условию 2 теоремы 1 и $\xi(t)$ ограниченное с вероятностью 1 решение (1.2); тогда процесс

$$\eta(t) = -\ln(\sqrt{1 + \xi^2(t)} - \xi(t))$$

будет решением уравнения

$$d\eta(s) = \bar{a}(s, \eta(s))ds + \bar{\sigma}(s, \eta(s))dw(s)$$

с ограниченными коэффициентами, где

$$\bar{a}(s, x) = a(s, \operatorname{sh} x) \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2}} - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh} x}{(1 + (\operatorname{sh} x)^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma^2(s, \operatorname{sh} x),$$

$$\bar{\sigma}(s, x) = \sigma(s, \operatorname{sh} x) (1 + (\operatorname{sh} x)^2)^{-\frac{1}{2}},$$

а

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Доказательство теоремы вытекает из формул (1.5), (1.6), (1.7), если учесть, что $f(t, x) = -\ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$, а $g(t, x) = \operatorname{sh} x$.

Замечание. В дальнейшем при изучении вопросов существования и единственности решения уравнения (1.2) мы можем условие 2 теоремы 1 заменять условием ограниченности коэффициентов уравнения.

§ 2. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих диффузионным процессам

Теорема 3 предыдущего параграфа относится лишь к тому случаю, когда коэффициенты уравнений удовлетворяют условиям теоремы существования и теоремы единственности. Мы рассмотрим некоторое обобщение этой теоремы на тот случай, когда условия теоремы единственности не выполняются.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнений (1.3) $a_i(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ непрерывны по совокупности переменных и при некотором $K > 0$ удовлетворяют неравенству

$$|a_1(s, x)| + |a_2(s, x)| + |\sigma(s, x)| \leq K \sqrt{1 + x^2}$$

и $\sigma(s, x) > 0$. Пусть далее распределения $\xi_i(t_0)$ абсолютно непрерывны одно относительно другого и плотность распределения $\xi_j(t_0)$ относительно распределения $\xi_j(t_0)$ равна $\varphi(x)$. Тогда существуют такие решения уравнений (1.3) $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, что меры μ_1 и μ_2 , соответствующие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, абсолютно непрерывны одна относительно другой и выполняется формула (1.4).

Доказательство. Рассмотрим последовательность разбиений отрезка $[t_0, T]$: $t_0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$ и положим $\Delta t_k^{(n)} = t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}$, $\Delta w_k^{(n)} = w(t_{k+1}^{(n)}) - w(t_k^{(n)})$. Будем предполагать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k \Delta t_k^{(n)} = 0$. Пусть $\xi_i^{(n)}(t) = \xi_i^{(n)}(t_k^{(n)})$ при $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$, $\xi_i^{(n)}(t_0) = \xi_i(t_0)$, а

$$\xi_i^{(n)}(t_{k+1}^{(n)}) = a_i(t_k^{(n)}, \xi_i^{(n)}(t_k^{(n)})) \Delta t_k^{(n)} + \sigma(t_k^{(n)}, \xi_i^{(n)}(t_k^{(n)})) \Delta w_k^{(n)}. \quad (2.1)$$

Заметим, что разностное уравнение (2.1) является частным случаем уравнения (3.2) гл. 3, рассмотренного при доказательстве теоремы существования § 3, гл. 3. Как вытекает из леммы 3, § 3, гл. 3 процессы $\xi_i^{(n)}(t)$ будут удовлетворять условиям замечания 2, § 6, гл. 1; поэтому на основании следствия 2, § 6, гл. 1 можно выбрать подпоследовательность n' и построить процессы

$$\tilde{w}_{n'}(t), \tilde{\xi}_1^{(n')}(t), \tilde{\xi}_2^{(n')}(t),$$

имеющие при каждом n' такие же совместные распределения, как и процессы $w(t)$, $\xi_1^{(n')}(t)$, $\xi_2^{(n')}(t)$, и при $n' \rightarrow \infty$, сходящиеся по вероятности к некоторым процессам $\tilde{w}(t)$, $\tilde{\xi}_1(t)$, $\tilde{\xi}_2(t)$. Как установлено при доказательстве теоремы существования § 3, гл. 3, процессы $\tilde{\xi}_i(t)$ будут удовлетворять уравнению

$$\tilde{\xi}_i(t) = \tilde{\xi}_i(t_0) + \int_{t_0}^t a_i(s, \tilde{\xi}_i(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \tilde{\xi}_i(s)) d\tilde{w}(s). \quad (2.2)$$

Пусть $\tilde{\mu}_i^{(n')}$ — мера, соответствующая процессу $\tilde{\xi}_i^{(n')}(t)$. Используя соотношение (2.1) и формулу (4.4) гл. 4 (в нашем случае $f_1 = f_2 = 0$, поэтому ρ считаем равным 1), можем записать:

$$\begin{aligned} \log \frac{d\tilde{\mu}_i^{(n')}}{d\tilde{\mu}_j^{(n')}}(\tilde{\xi}_j^{(n')}(t)) &= \log \varphi_{i,j}(\tilde{\xi}_j^{(n')}(t_0)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n'-1} \frac{a_i(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')})) - a_j(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')}))}{\sigma(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')}))} \Delta \tilde{w}_k^{(n')} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n'-1} \left(\frac{a_i(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')})) - a_j(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')}))}{\sigma(t_k^{(n')}, \tilde{\xi}_j^{(n')}(t_k^{(n')}))} \right)^2 \Delta t_k^{(n')}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На основании теоремы § 3 гл. 2 получаем:

$$\begin{aligned} \log \frac{d\tilde{\mu}_i^{(n')}}{d\tilde{\mu}_j^{(n')}}(\tilde{\xi}_j^{(n')}(t)) &\rightarrow \log \varphi(\tilde{\xi}_j(t_0)) + \\ &+ \int_{t_0}^T \frac{a_i(s, \tilde{\xi}_j(s)) - a_j(s, \tilde{\xi}_j(s))}{\sigma(s, \tilde{\xi}_j(s))} d\tilde{w}(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left(\frac{a_i(s, \tilde{\xi}_j(s)) - a_j(s, \tilde{\xi}_j(s))}{\sigma(s, \tilde{\xi}_j(s))} \right)^2 ds; \end{aligned} \quad (2.4)$$

таким образом, используя лемму 4, § 2, гл. 3 можем заключить, что меры $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$, соответствующие процессам $\tilde{\xi}_1(t)$ и $\tilde{\xi}_2(t)$, абсолютно непрерывны одна относительно другой и $\log \frac{d\tilde{\mu}_1}{d\tilde{\mu}_j}(\tilde{\xi}_j(t))$ определяется правой частью соотношения (2.4).

Так как $\tilde{\xi}_i(t_0)$ и $\tilde{w}(s)$ имеют точно такие же совместные распределения как и $\xi_i(t_0)$ и $w(s)$, то существует такой процесс $\xi_i(s)$, при котором совместные распределения $\xi_i(s)$, $\xi_i(t_0)$, $w(s)$ будут такими же, как и совместные распределения $\tilde{\xi}_i(s)$, $\tilde{\xi}_i(t_0)$, $\tilde{w}(s)$ (поскольку $\tilde{\xi}_i(s)$ является некоторой измеримой функцией от $\tilde{\xi}_i(t_0)$ и $\tilde{w}(t)$, то $\xi_i(s)$ должно равняться этой функции, если в неё вместо $\tilde{\xi}_i(t_0)$ подставить $\xi_i(t_0)$, а вместо $\tilde{w}(t) - w(t)$). Тогда $\xi_i(s)$ будет удовлетворять уравнению (1.3), $\tilde{\mu}_i$ будет совпадать с μ_i , и из (2.4) $\log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\xi_1(t))$ будет задаваться формулой (1.4). Теорема доказана.

§ 3. Теорема сравнения для диффузионных процессов

Установим, что при некоторых предположениях диффузионный процесс монотонно зависит от коэффициента переноса. Этот факт будет использован для установления более общих условий единственности решения уравнения (1.2).

Теорема. Пусть $a_1(t, x)$, $a_2(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям:

1) $a_1(t, x)$, $a_2(t, x)$, $\sigma(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных при $t \in [t_0, T]$, $x \in (-\infty, \infty)$;

2) $\sigma(t, x) > 0$ и для каждого $C > 0$ существуют $\alpha > \frac{1}{2}$, $L > 0$ такие, что при $|x| \leq C$, $|y| \leq C$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L |x - y|^\alpha.$$

Пусть далее $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с вероятностью 1 непрерывные решения уравнений:

$$\xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t a_i(s, \xi_i(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \xi_i(s)) dw(s), \quad i = 1, 2.$$

Тогда, если $a_1(t, x) < a_2(t, x)$ для всех t и x и $P\{\xi_1(t_0) \leq \xi_2(t_0)\} = 1$, то $\xi_1(t) \leq \xi_2(t)$ для всех t с вероятностью 1.

Доказательство теоремы будет опираться на следующую лемму.

Лемма. Пусть выполняются условия теоремы, а τ такая случайная величина, что событие $\{\tau > s\}$ не зависит от $w(t) - w(s)$ при $t > s$ и $\xi_1(\tau) = \xi_2(\tau)$ с вероятностью 1. Тогда существует такое τ_1 , что $\tau_1 > \tau$ с вероятностью 1 и при $s \in (\tau, \tau_1)$ с вероятностью 1 выполняется неравенство $\xi_1(s) < \xi_2(s)$.

Доказательство. Пусть $\chi_a^b(s)$ обозначает характеристическую функцию интервала (a, b) , а $\psi(s) = 0$ при $s < \tau$ и для тех $s > \tau$, для которых

$$\inf_{\tau < u < s} (a_2(u, \xi_2(u)) - a_1(u, \xi_1(u))) \leq \frac{1}{2} (a_2(\tau, \xi_2(\tau)) - a_1(\tau, \xi_1(\tau))),$$

$\psi(s) = 1$, если $s \geq \tau$ и

$$\inf_{\tau < u < s} (a_2(u, \xi_2(u)) - a_1(u, \xi_1(u))) > \frac{1}{2} (a_2(\tau, \xi_2(\tau)) - a_1(\tau, \xi_1(\tau))).$$

Положим далее

$$\phi_h^{(C)}(s) = \chi_{-C}^C(s) (\sup_{t_0 < u < s} (|\xi_1(u)| + |\xi_2(u)|)) \chi_{\tau}^{\tau+h}(s) \psi(s).$$

Покажем, что с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] dw(s) = 0. \quad (3.1)$$

Действительно, используя неравенство Гельдера, получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left(\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] dw(s) \right)^2 = \\ &= \int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]^2 ds \leq L^2 \int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) |\xi_1(s) - \\ & - \xi_2(s)|^{2\alpha} ds \leq L^2 \left[\int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) ds \right]^{1-\alpha} \cdot \left[\mathbf{M} \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) |\xi_2(s) - \right. \\ & \left. - \xi_1(s)|^2 ds \right]^\alpha \leq L^2 h^{1-\alpha} \left[\int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) |\xi_2(s) - \xi_1(s)|^2 ds \right]^\alpha. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \psi_h^{(C)}(s) (\xi_2(s) - \xi_1(s)) &= \psi_h^{(C)}(s) \int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) [a_2(u, \xi_2(u)) - \\ & - a_1(u, \xi_1(u))] du + \psi_h^{(C)}(s) \int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) [\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))] dw(u), \end{aligned}$$

и при некотором $H, \chi_{-C}^C(x) (|a_1(s, x)| + |a_2(s, x)|) \leq H,$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left(\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] dw(s) \right)^2 \leq \\ & \leq L^2 h^{1-\alpha} \left[\int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) \left[8H^2 h^2 + 2 \left\{ \int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right\}^2 \right] ds \right]^\alpha \leq L^2 h^{1-\alpha} \left[8H^2 h^3 + \right. \\ & \left. + 2 \int_{t_0}^T \mathbf{M} \psi_h^{(C)}(s) \left\{ \int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right\}^2 ds \right]^\alpha \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_1 h^{1+2\alpha} + C_2 h^{1-\alpha} \left(\int_{t_0}^T M \psi_h^{(s)}(s) \left\{ \int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right\}^2 ds \right)^\alpha,$$

где C_1 и C_2 некоторые постоянные. Но

$$\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) \left[\int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right]^2 ds \leq \\ \leq h \max_s \left[\int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right]^2;$$

поэтому на основании свойства 5 мартингалов § 5, гл. 1

$$M \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) \left[\int_{t_0}^s \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right]^2 ds \leq \\ \leq 4h \int_{t_0}^T M \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u)))^2 du.$$

Таким образом, если

$$\nu(h) = \int_{t_0}^T M \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u)))^2 du,$$

то при некоторых C_1 и C_3 выполняется неравенство:

$$\nu(h) \leq C_1 h^{1+2\alpha} + C_3 h [\nu(h)]^\alpha.$$

Умножая обе части неравенства на $h^{-1-2\alpha}$, получим

$$(\nu(h) h^{-1-2\alpha}) \leq C_1 + C_3 h^{2\alpha-1} (\nu(h) h^{-1-2\alpha})^\alpha.$$

Из этого неравенства вытекает, что при $h \leq 1$ существует такая постоянная D , не зависящая от h , что

$$\nu(h) h^{-1-2\alpha} \leq D$$

(мы можем считать, что $\alpha < 1$, и если бы $\nu(h) h^{-1-2\alpha} \rightarrow \infty$, то тогда имели бы место два противоречащих друг другу соотношения:

$$(\nu(h) h^{-1-2\alpha})^\alpha = o(\nu(h) h^{-1-2\alpha}),$$

$$\nu(h) h^{-1-2\alpha} = O(\nu(h) h^{-1-2\alpha})^\alpha.$$

Значит при некотором D

$$M \left[\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) (\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))) d\omega(s) \right]^2 \leq D h^{1+2\alpha}.$$

Заметим теперь, что

$$\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] d\omega(s) = \int_{t_0}^T f(s) \chi_{\tau+h}^{\tau}(s) d\omega(s),$$

где $f(s)$ — некоторая функция, измеримая относительно минимальной σ -алгебры, относительно которой измеримы $\xi_i(t_0)$ и $\omega(t)$ при $t \leq s$. Так как

$$\lambda(h) = \int_{t_0}^T f(s) \chi_{\tau+h}^{\tau}(s) d\omega(s) = \zeta(\tau+h) - \zeta(\tau),$$

где $\zeta(t) = \int_{t_0}^t f(s) d\omega(s)$ и $\zeta(s)$ являются мартингалом, то на основании свойства 7 мартингалов § 5, гл. 1 $\zeta(\tau+h)$, а значит и $\lambda(h) = \zeta(\tau+h) - \zeta(\tau)$ будет мартингалом. Поэтому, применяя к $\lambda(h)$ свойство 5 мартингалов § 5, гл. 1, получаем:

$$M \sup_{0 < h < h_0} \left[\int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] d\omega(s) \right]^2 \leq 4 D h_0^{1+2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{\frac{1}{2^{k+1}} < h < \frac{1}{2^k}} \left| \frac{1}{h} \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] d\omega(s) \right| > \frac{1}{k} \right\} &\leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{0 < h < \frac{1}{2^k}} \left| \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] d\omega(s) \right| > \frac{1}{k 2^{k+1}} \right\} \leq \\ &\leq 4 D k^2 2^{2k+2} \left(\frac{1}{2^k} \right)^{1+2\alpha} \leq \frac{16 D k^2}{2^{(2\alpha-1)k}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^{(2\alpha-1)k}} < \infty,$$

с вероятностью 1, то существует такое k_0 , что при $k > k_0$ будет выполняться соотношение

$$\sup_{0 < h < \frac{1}{2^k}} \frac{1}{h} \left| \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(s) [\sigma(s, \xi_2(s)) - \sigma(s, \xi_1(s))] dw(s) \right| < \frac{1}{k}$$

(мы пользуемся леммой Бореля — Кантелли). Из последнего неравенства и вытекает (3.1).

Для доказательства леммы воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} \psi_h^{(C)}(\tau + h) [\xi_2(\tau + h) - \xi_1(\tau + h)] &= \psi_h^{(C)}(\tau + h) \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(u) (a_2(u, \xi_2(u)) - \\ &- a_1(u, \xi_1(u))) du + \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) > \\ &> h \psi_h^{(C)}(\tau + h) \left[\frac{1}{2} (a_2(\tau, \xi_2(\tau)) - a_1(\tau, \xi_1(\tau))) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{h} \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(u) (\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))) dw(u) \right]. \end{aligned}$$

Из (3.1) вытекает, что существует такое h' , что при $0 < h < h'$

$$\frac{1}{h} \left| \int_{t_0}^T \psi_h^{(C)}(u) [\sigma(u, \xi_2(u)) - \sigma(u, \xi_1(u))] dw(u) \right| < \frac{1}{4} (a_2(\tau, \xi_2(\tau)) - a_1(\tau, \xi_1(\tau)))$$

и значит

$$\psi_h^{(C)}(\tau + h) [\xi_2(\tau + h) - \xi_1(\tau + h)] \geq \frac{h}{4} \psi_h^{(C)}(\tau + h) (a_2(\tau, \xi_2(\tau)) - a_1(\tau, \xi_1(\tau)))$$

при $h < h'$. Из последнего соотношения и вытекает доказательство леммы, так как почти для всех элементарных событий ω найдутся такие C и h' , что при $h < h'$ $\psi_h^{(C)}(\tau + h) = 1$.

Доказательство теоремы. Пусть τ_1 первый по величине нуль разности $\xi_2(t) - \xi_1(t)$. Тогда событие $\{\tau_1 > s\}$ зависит лишь от поведения $w(t)$ на отрезке $[t_0, s]$ и не зависит от $w(t) - w(s)$ при $t > s$. На основании леммы можно утверждать, что следующий после τ_1 нуль разности $\xi_2(t) - \xi_1(t)$ будет лежать на положительном расстоянии от τ_1 , причём, если этот нуль обозначить через τ_2 , то $\xi_2(t) > \xi_1(t)$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Очевидно также, что событие $\{\tau_2 > s\}$ не зависит от $w(t) - w(s)$ при $t > s$. Рассуждая аналогичным образом, убеждаемся, что после каждого нуля разности $\xi_2(s) - \xi_1(s)$ существует непосредственно следующий; таким образом, эти нули можно записать в трансфинитную возрастающую последовательность τ_α

(α — порядковое число), причём при каждом α событие $\{\tau_\alpha > s\}$ не зависит от $\omega(t) - \omega(s)$ при $t > s$ и при $s \in (\tau_\alpha, \tau_{\alpha+1})$ $\xi_2(s) > \xi_1(s)$. Если существует максимальный нуль τ , то он также будет членом трансфинитной последовательности; следовательно, опять используя лемму, мы можем утверждать, что при некотором h (случайном) $\xi_2(s) \geq \xi_1(s)$, если $t \in (\tau, \tau + h)$. Так как $\xi_2(s) > \xi_1(s)$ в интервале (τ, T) не меняет знак, то $\xi_2(s) > \xi_1(s)$ при $s \in (\tau, T)$. Так что для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство $\xi_1(s) \leq \xi_2(s)$. Теорема доказана.

§ 4. Теорема о единственности решения стохастического уравнения для диффузионных процессов

Теорема. Пусть $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям:

1) $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, T]$, $x \in (-\infty, \infty)$;

2) при некотором K выполняется неравенство

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + x^2);$$

3) $\sigma(t, x) > 0$, и для каждого $C > 0$ существуют такие $L > 0$ и $\alpha > \frac{1}{2}$, что при $|x| \leq C$, $|y| \leq C$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

Тогда при всяком $\xi(t_0)$, не зависящем от $\omega(t)$, уравнение (1.2) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное решение.

Доказательство. Как указывалось в замечании к теореме 4, § 1, вместо условия 2 можно предполагать выполненным условие

$$|a(s, x)| + |\sigma(s, x)| \leq K.$$

Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ два решения уравнения (2.1). Положим при $\varepsilon \in (0, 1)$

$$a_\varepsilon^*(s, x) = a(s, x) - \varepsilon \sigma(s, x),$$

$$a_\varepsilon^{**}(s, x) = a(s, x) + \varepsilon \sigma(s, x);$$

и пусть $\xi_\varepsilon^*(t)$ и $\xi_\varepsilon^{**}(t)$ решения уравнений

$$\xi_\varepsilon^*(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a_\varepsilon^*(s, \xi_\varepsilon^*(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \xi_\varepsilon^*(s)) d\omega(s), \quad (4.1)$$

$$\xi_\varepsilon^{**}(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a_\varepsilon^{**}(s, \xi_\varepsilon^{**}(s)) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, \xi_\varepsilon^{**}(s)) d\omega(s) \quad (4.2)$$

такие, что

$$\log \frac{d\mu_{\xi}^{**}}{d\mu_{\xi}^*}(\xi_s^*(t)) = \int_{t_0}^T \left(\frac{a_s^{**}(s, \xi_s^*(s)) - a_s^*(s, \xi_s^*(s))}{\sigma(s, \xi_s^*(s))} \right) d\omega(s) - \\ - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left(\frac{a_s^{**}(s, \xi_s^*(s)) - a_s^*(s, \xi_s^*(s))}{\sigma(s, \xi_s^*(s))} \right)^2 ds = 2\alpha(\omega(T) - \omega(t_0)) - \\ - 2\varepsilon^2(T - t_0) \quad (4.3)$$

(μ_{ξ}^* и μ_{ξ}^{**} обозначают меры, соответствующие процессам $\xi_s^*(t)$ и $\xi_s^{**}(t)$). Существование решений (4.1) и (4.2), для которых выполняется (4.3), вытекает из теоремы § 2. Из теоремы § 3 вытекает, что с вероятностью 1 имеют место неравенства:

$$\xi_s^*(t) \leq \xi_1(t) \leq \xi_s^{**}(t),$$

$$\xi_s^*(t) \leq \xi_2(t) \leq \xi_s^{**}(t).$$

Поэтому $|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \leq \xi_s^{**}(t) - \xi_s^*(t)$. Заметим, что ввиду ограниченности $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ для всех $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливы соотношения:

$$M(\xi_s^*(t) - \xi_s^*(t_0))^2 \leq K^2(T - t_0)^2 + K^2(T - t_0),$$

$$M(\xi_s^{**}(t) - \xi_s^{**}(t_0))^2 \leq K^2(T - t_0)^2 + K^2(T - t_0).$$

Из формулы (4.3) вытекает, что

$$M(\xi_s^{**}(t) - \xi_s^{**}(t_0)) = M(\xi_s^*(t) - \xi_s^*(t_0)) e^{2\varepsilon(\omega(T) - \omega(t_0) - \varepsilon T + \varepsilon t_0)};$$

следовательно,

$$M|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \leq M(\xi_s^{**}(t) - \xi_s^*(t)) \leq M(\xi_s^*(t) - \\ - \xi_s(t_0)) (e^{2\varepsilon(\omega(T) - \omega(t_0) - \varepsilon T + \varepsilon t_0)} - 1) \leq \\ \leq \sqrt{M(\xi_s^*(t) - \xi_s(t_0))^2} \sqrt{M(e^{2\varepsilon(\omega(T) - \omega(t_0) - \varepsilon T + \varepsilon t_0)} - 1)^2} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, для всех $t \in [t_0, T)$ $P\{\xi_1(t) = \xi_2(t)\} = 1$. Отсюда, учитывая непрерывность $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с вероятностью 1, получаем, что $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ для всех t с вероятностью 1. Теорема доказана.

Г л а в а 6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ ЦЕПИ МАРКОВА К МАРКОВСКОМУ ПРОЦЕССУ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим последовательность цепей Маркова: $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \dots, \xi_n^{(n)}$. Пусть $t_0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$ последовательность разбиений отрезка $[t_0, T]$. Свяжем с каждой из этих цепей Маркова случайный процесс $\xi^{(n)}(t) = \xi_k^{(n)}$ при $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$. Процесс $\xi^{(n)}(t)$ представляет собой ступенчатую функцию, которая имеет в точках $t_k^{(n)}$ стохастические разрывы. Если при $n \rightarrow \infty$ $\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \rightarrow 0$ и $\xi_{k+1}^{(n)} - \xi_k^{(n)}$ равномерно относительно k сходит

к нулю по вероятности, то процесс $\xi^{(n)}(t)$ можно считать приближенно стохастически непрерывным. Нас будет интересовать вопрос, когда этот процесс можно приближенно считать решением стохастического уравнения, рассмотренного в главе 3, т. е. условия, при которых $\xi^{(n)}(t)$ в каком-то определённом смысле при $n \rightarrow \infty$ будет сходиться к процессу $\xi(t)$, являющемуся решением стохастического уравнения.

Ниже будут изучаться, во-первых условия, при которых конечномерные распределения процессов $\xi^{(n)}(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ указанного вида; во-вторых, исследоваться предельное поведение таких характеристик процессов $\xi^{(n)}(t)$, которые не выражаются через значения

$\xi^{(n)}(t)$ в конечном числе точек (например: $\int_{t_0}^T f(t, \xi^{(n)}(t)) dt$,

$\sup_f \xi^{(n)}(t)$ и др.). Поэтому представляет интерес нахождение условий, при которых распределения некоторых функционалов от $\xi_n(t)$ будут сходиться к распределению соответствующих функционалов от $\xi(t)$. Очевидно, что такие условия будут зависеть от класса функционалов $F(x(t))$, для которых предельное распределение $F(\xi^{(n)}(t))$ должно совпадать с распределе-

нием $F(\xi(t))$. Будет найден довольно широкий класс функционалов, обладающий свойством, при котором для случая сходимости марковских процессов рассматриваемого вида к решениям стохастических уравнений выполнение условий сходимости конечномерных распределений повлечет сходимость распределений функционалов из этого класса.

Поскольку процессы $\xi^{(n)}(t)$ и $\xi(t)$, являющиеся решениями стохастических уравнений, с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода, причём $\xi^{(n)}(t)$ непрерывны справа, а $\xi(t)$ можно считать таковыми, мы будем рассматривать функционалы, определённые на пространстве функций, не имеющих разрывов второго рода и непрерывных справа. Класс функционалов будет определяться в терминах непрерывности функционалов по отношению к некоторой сходимости, определённой для функций без разрывов второго рода непрерывных справа. Эта сходимость будет изучаться в § 2. В § 3 будет установлена одна общая предельная теорема для процессов с вероятностью 1, не имеющих разрывов второго рода. Затем в § 4 будут изучаться условия сходимости конечномерных распределений процессов $\xi^{(n)}(t)$ к процессу $\xi(t)$, являющемуся решением уравнения (1.8) главы 3. Наконец, в § 5 будет доказана предельная теорема для распределений функционалов от марковских процессов указанного типа.

§ 2. Об одном виде сходимости функций без разрывов второго рода

Рассмотрим пространство $D_n[t_0, T]$ функций $x(t)$, определённых при $t \in [t_0, T]$, принимающих значения из $R^{(m)}$ и обладающих свойствами:

1) в каждой точке $t \in [t_0, T]$ существует $x(t-0)$, причём $x(T-0) = x(T)$;

2) в каждой точке $t \in [t_0, T]$ существует $x(t+0)$, причём $x(t+0) = x(t)$, если $t_0 \leq t < T$. Для всякой функции $x(t) \in D_m[t_0, T]$ положим

$$x^e(t) = x(t) - \sum_{s < t} [x(s) - x(s-0)],$$

$$|x(s) - x(s-0)| > \varepsilon.$$

Определение 1. Последовательность $x_n(t)$ функций из $D_m[t_0, T]$ \mathbf{J} — сходится к функции $x_0(t)$ из $D_m[t_0, T]$, если

а) для всякого $\varepsilon > 0$, для которого $x_0(t)$ не имеет скачков. по модулю, равных ε , $x_n(t) - x_n^e(t) \rightarrow x_0(t) - x_0^e(t)$ почти для всех $t \in [t_0, T]$,

б) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < T} |x_n^e(t) - x_0^e(t)| = 0$.

То, что $x_n(t)$ J сходится к $x_0(t)$, записывается так:

$$x_n(t) \underset{\rightarrow}{J} x_0(t), \quad x_0(t) = J \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Оказывается, что всякая J-сходящаяся последовательность может быть малыми деформациями отрезка $[t_0, T]$ превращена в равномерно сходящуюся последовательность. Высказанное определение эквивалентно следующему.

Определение 2. Последовательность $x_n(t)$ J сходится к $x_0(t)$, если существует последовательность непрерывных монотонно возрастающих функций $\lambda_n(t)$ таких, что $\lambda_n(t_0) = t_0$, $\lambda_n(T) = T$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t (|x_n(\lambda_n(t)) - x_0(t)| + |\lambda_n(t) - t|) = 0. \quad (2.1)$$

Пусть $x(t) \in D_m[t_0, T]$. Положим для каждого $C > 0$

$$\Delta_c(x(t)) = \sup_{\substack{t_0 \leq t' < t < t'' \leq T \\ |t' - t''| < C}} \min[|x(t') - x(t)|; |x(t) - x(t'')|] + \\ + \sup_{0 < h < C} (|x(t_0 + h) - x(t_0)| + |x(T) - x(T - h)|).$$

Очевидно, что для всякой функции $x(t)$ из $D_m[t_0, T]$ выполняется условие:

$$\lim_{C \rightarrow 0} \Delta_c(x(t)) = 0.$$

Определим теперь величину $\rho_c(x(t), y(t))$ для всех $x(t)$ и $y(t)$ из $D_m[t_0, T]$ и $C > 0$ по формуле:

$$\rho_c(x(t), y(t)) = \Delta_c(x(t)) + \Delta_c(y(t)) + \sup_{t_0 \leq t < T - \frac{C}{2}} \inf_{s \in [t, t + \frac{C}{2}]} |x(s) - y(s)|.$$

Величина $\rho_c(x_n(t), x_0(t))$ позволяет судить о сходимости $x_n(t)$ к $x_0(t)$.

Теорема. Для того, чтобы $x_0(t) = J - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$, необходимо, чтобы было выполнено условие:

$$\lim_{C \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_c(x_n(t), x_0(t)) = 0, \quad (2.2)$$

и достаточно, чтобы существовала такая последовательность c_n , сходящаяся к нулю, для которой $\rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) \rightarrow 0$.

Доказательство необходимости. Пусть $x_n(t) \underset{\rightarrow}{J} x_0(t)$. Из второго определения J-сходимости легко вывести, что $x_n(t) \rightarrow x_0(t)$ в каждой точке непрерывности $x_0(t)$. Поэтому для каждого $c > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t_0 \leq t < T - C} \inf_{s \in [t, t + C]} |x_n(s) - x_0(s)|.$$

При $c \rightarrow 0$ $\Delta_c(x_0(t)) \rightarrow 0$. Таким образом, нужно только установить, что

$$\lim_{c \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_c(x_n(t)) = 0.$$

Пусть $\lambda_n(t)$ удовлетворяют условиям определения 2. Тогда, если $\sup_t |\lambda_n(t) - t| < \frac{c}{2}$, справедливо неравенство:

$$\Delta_c(x_n(t)) \leq \Delta_c(x_0(t)) + 3 \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - x_0(t)|.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_c(x_n(t)) \leq \Delta_c(x_0(t)),$$

и

$$\lim_{c \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_c(x_n(t)) \leq \lim_{c \rightarrow 0} \Delta_c(x_0(t)) = 0.$$

Необходимость условия (2.2) доказана.

Для доказательства достаточности условий теоремы используем следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $x(t), y(t) \in D_m[t_0, T]$ и $|x(t_1) - x(t_1 - 0)| > \varepsilon$. Если при некотором $h > 0$ $\rho_h(x(t), y(t)) < \mu$ а $\mu < \frac{\varepsilon}{7}$, то в интервале $(t_1 - \frac{h}{2}, t_1 + \frac{h}{2})$ найдётся точка t' такая, что $|y(t' - 0) - x(t_1 - 0)| < 3\mu$, $|y(t') - x(t_1)| < 3\mu$ и $|y(t) - y(t' - 0)| \leq \mu$ при $t \in (t' - h, t')$, $|y(t) - y(t')| < \mu$ при $t \in [t', t' + h]$.

Доказательство. Существуют такие точки $s_1 \in (t_1 - \frac{h}{2}, t_1)$ и $s_2 \in (t_1, t_1 + \frac{h}{2})$, для которых $|y(s_1) - x(s_1)| < \mu$, $|y(s_2) - x(s_2)| < \mu$. Так как $\Delta_h(x(t)) < \mu$, то

$$\min [|x(s_1) - x(t_1 - 0)|; |x(t_1) - x(t_1 - 0)|] < \mu,$$

$$\min [|x(s_2) - x(t_1)|; |x(t_1) - x(t_1 - 0)|] < \mu;$$

так как $|x(t_1) - x(t_1 - 0)| > \varepsilon > \mu$, то и $|x(s_1) - x(t_1 - 0)| < \mu$, $|x(s_2) - x(t_1)| < \mu$. Таким образом, $|y(s_1) - x(t_1 - 0)| < 2\mu$, $|y(s_2) - x(t_1)| < 2\mu$; так что $|y(s_1) - y(s_2)| > \varepsilon - 4\mu > 3\mu$.

Поскольку

$$\min_{s_1 \leq s' < t < s'' \leq s_2} [|y(s') - y(t)|, |y(t) - y(s'')|] < \mu,$$

то существует в интервале $[s_1, s_2]$ такая точка t' , что $|y(s_1) - y(t)| < \mu$ при $s_1 \leq t < t'$ и $|y(s_2) - y(t)| < \mu$ при $t' \leq t \leq s_2$. Следовательно, $|y(s_1) - y(t' - 0)| \leq \mu$, $|y(s_2) - y(t')| < \mu$ и $|y(t' - 0) - x(t_1 - 0)| < 3\mu$, $|y(t') - x(t_1)| < 3\mu$.

Так как $|y(t' - 0) - y(t')| > \varepsilon - 6\mu < \mu$, а

$$\min_{t'-h < t < t'} [|y(t) - y(t' - 0)|; |y(t' - 0) - y(t')|] < \mu,$$

то $|y(t) - y(t' - 0)| \leq \mu$. Точно так устанавливаем, что $|y(t) - y(t')| < \mu$ при $t \in [t', t' + h)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $x(t)$ и $y(t)$ не имеют скачков, превосходящих по абсолютной величине ε , и при некотором $h < \frac{T_0 - t_0}{2}$

$$\rho_h(x(t), y(t)) < \mu,$$

то

$$\sup_t |x(t) - y(t)| < 2\varepsilon + 5\mu.$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $|t_1 - t_2| < h$ $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon + 2\mu$.

Действительно, пусть $t_1 < t_2$ и $t' \in (t_1, t_2)$ такие, что $|x(t_1) - x(s)| \leq \mu$ при $s < t'$, а $|x(t_1) - x(t')| > \mu$. Тогда

$$\begin{aligned} |x(t_1) - x(t')| &\leq |x(t_1) - x(t' - 0)| + \\ &+ |x(t' - 0) - x(t')| \leq \varepsilon + \mu. \end{aligned}$$

Но

$$\min (|x(t_1) - x(t')|; |x(t') - x(t_2)|) < \mu,$$

и значит $|x(t') - x(t_2)| < \mu$. Поэтому $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon + 2\mu$. Аналогично устанавливаем, что $|y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon + 2\mu$ при $|t_1 - t_2| < h$. Если $t \in [t_0, T]$, то найдётся такое t' , что $|t - t'| < \frac{h}{2}$ и $|y(t') - x(t')| < \mu$. Поэтому

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq |y(t') - x(t')| + \\ &+ |y(t') - y(t)| + |x(t') - x(t)| < 2\varepsilon + 5\mu. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $\rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) \rightarrow 0$ и $c_n \rightarrow 0$. Возьмём такое $\varepsilon > 0$, чтобы $x_0(t)$ не имело скачков, равных по абсолютной величине ε . Тогда существует такое $\mu > 0$, при котором $\mu < \frac{\varepsilon}{7}$ и $x_0(t)$ не имеют скачков, абсолютная величина которых попадала бы в отрезок $[\varepsilon - 6\mu, \varepsilon + 6\mu]$. Обозначим через $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ все точки, в которых скачки $x_0(t)$ превосходят по абсолютной величине ε , а через δ — наименьшее из чисел $t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_k - t_{k-1}, T - t_k$. Выберем настолько большое n , чтобы $c_n < \frac{\delta}{2}$ и $\rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) < \mu$. Тогда в интервалах $(t_i - \frac{c_n}{2}, t_i + \frac{c_n}{2})$ найдутся (по лемме 1) такие точки $t_i^{(n)}$, что $|x_n(t_i^{(n)}) - 0 - x_0(t_i - 0)| < 3\mu$, а $|x_n(t_i^{(n)}) - x_0(t_i)| < 3\mu$;

следовательно,

$$|x_n(t_i^{(n)} - 0) - x_n(t_i^{(n)})| > |x_0(t_i) - x_0(t_i - 0) - 6\mu| > \varepsilon.$$

Из леммы 1 вытекает, что в интервалах $(t_i^{(n)} - c_n, t_i^{(n)})$, $(t_i^{(n)}, t_i^{(n)} + c_n)$ $x_n(t)$ не имеет скачков, по абсолютной величине превосходящих 2μ . Таким образом, в каждом из интервалов $(t_i - \frac{c_n}{2}, t_i + \frac{c_n}{2})$ имеется только один скачок $x_n(t)$, абсолютная величина которого превосходит ε . $x_n(t)$ не может иметь скачка, превосходящего ε по абсолютной величине в точке t' , отличающейся от точек $t_i^{(n)}$. Действительно, тогда из леммы 1 нашлась бы такая точка t'' , что $|t' - t''| < \frac{c_n}{2}$ и $|x_0(t'') - x_0(t'' - 0)| > \varepsilon - 6\mu$. Но в силу выбора μ можно утверждать, что неравенство $|x_0(t'') - x_0(t'' - 0)| > \varepsilon - 6\mu$ влечёт неравенство $|x_0(t'') - x_0(t'' - 0)| > \varepsilon$; так что при некотором j $t'' = t_j$. Тогда в интервале $(t_j - \frac{c_n}{2}, t_j + \frac{c_n}{2})$ оказываются две точки t' и $t_j^{(n)}$, в которых скачки $x_n(t)$ превосходят по абсолютной величине ε ; а это не возможно. Таким образом,

$$x_n(t) - x_n^e(t) = \sum_{t_i^{(n)} < t} (x_n(t_i^{(n)}) - x_n(t_i^{(n)} - 0)),$$

а

$$x_0(t) - x_0^e(t) = \sum_{t_i < t} (x_0(t_i) - x_0(t_i - 0)).$$

Из леммы 2 и условия $\rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) \rightarrow 0$ вытекает, что $x_n(t) \rightarrow x_0(t)$ в каждой точке непрерывности $x_0(t)$. Поэтому $|x_n(t_i^{(n)}) - x_0(t_i)| \rightarrow |x_n(t_i^{(n)} - 0) - x_0(t_i - 0)| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$; а из $c_n \rightarrow 0$ вытекает, что $t_i^{(n)} \rightarrow t_i$. Следовательно, $x_n(t) - x_n^e(t) \rightarrow x_0(t) - x_0^e(t)$ при $t \neq t_i$. Поэтому $x_n^e(t) \rightarrow x_0^e(t)$ для всех t , являющихся точками непрерывности $x_0^e(t)$ (поскольку это выполняется для $x_n(t)$). Кроме того, мы можем сделать вывод, что для последовательности $x_n(t)$ выполняется условие а) определения 1.

Покажем, что в том случае, когда $\Delta_c(x(t)) < \varepsilon$, $\Delta_c(x^e(t)) < 2\Delta_c(x(t))$. Действительно, при $t_1 < t_2 < t_3$, $t_3 - t_1 < c$

$$\min(|x^e(t_1) - x^e(t_2)|, |x^e(t_2) - x^e(t_3)|) \leq \Delta_c(x(t)),$$

если только в интервале (t_1, t_3) нет скачка $x(t)$, превосходящего по абсолютной величине ε ; если же в точке $t' \in (t_1, t_2)$ скачок превосходит ε , то

$$\min(|x^e(t_1) - x^e(t_2)|, |x^e(t_2) - x^e(t_3)|) \leq |x^e(t_2) - x^e(t_3)| \leq$$

$\leq |x(t_2) - x(t')| + |x(t_3) - x(t')| = \min (|x(t' - 0) - x(t')|, |x(t') - x(t_2)|) + \min (|x(t' - 0) - x(t')|, |x(t') - x(t_3)|) \leq 2\Delta_c(x(t))$:
аналогичное неравенство имеет место и в том случае, когда $x(t)$ имеет скачок, превосходящий по абсолютной величине ε , в интервале (t_2, t_3) . Из сказанного выше вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{c_n}(x_n^\varepsilon(t)) = 0,$$

Рассмотрим теперь $\inf_{\bar{t} < t < \bar{t} + \frac{c_n}{2}} |x_n^\varepsilon(t) - x_n^\varepsilon(t)|$. Если в $(\bar{t}, \bar{t} + \frac{c_n}{2})$

нет ни одной точки $t_i, t_i^{(n)}$, то

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{t} < t < \bar{t} + \frac{c_n}{2}} |x_n^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)| &< \inf_{\bar{t} < t < \bar{t} + \frac{c_n}{2}} |x_n(t) - x_0(t)| + \\ &+ \sum_{i=1}^k (|x_n(t_i^{(n)}) - x_0(t_i)| + |x_n(t_i^{(n)}) - 0 - x_0(t_i - 0)|) \leq \\ &\leq (6k + 1) \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)). \end{aligned}$$

Если в интервале $(\bar{t}, \bar{t} + \frac{c_n}{2})$ находится точка t_i и $t_i^{(n)} < t_i$, то, так как $|t_i^{(n)} - t_i| < \frac{c_n}{2}$ при $t' \in (t_i, \bar{t} + \frac{c_n}{2})$, $|t' - t_i| < \frac{c_n}{2}$, $|t_i^{(n)} - t'| < c_n$, и значит

$$\begin{aligned} |x_n^\varepsilon(t') - x_0^\varepsilon(t')| &\leq |x_n(t') - x_0(t')| + 6k \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) \leq \\ &\leq |x_n(t') - x_n(t_i^{(n)})| + |x_0(t') - x_0(t_i)| + |x_n(t_i^{(n)}) - x_0(t_i)| + \\ &+ 6k \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) < (6k + 5) \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)). \end{aligned}$$

Используя симметрию $t_i^{(n)}$ и t_i , можем утверждать, что всегда

$$\inf_{\bar{t} < t < \bar{t} + \frac{c_n}{2}} |x_n^\varepsilon(t) - x_0(t)| \leq (6k + 5) \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)).$$

Поэтому

$$\rho_{c_n}(x_n^\varepsilon(t), x_0^\varepsilon(t)) \leq (6k + 7) \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t))$$

при $c_n < \frac{\delta}{2}$, $\rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)) < \mu$. Применяя лемму 2, получаем неравенство

$$\sup_t |x_n^\varepsilon(t) - x_0^\varepsilon(t)| \leq 2\varepsilon + 5(6k + 7) \rho_{c_n}(x_n(t), x_0(t)),$$

из которого вытекает выполнение условия б) определения 1. Следовательно,

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Теорема доказана.

§ 3. Предельная теорема для J-непрерывных функционалов

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ определены процессы $\xi_n(t)$ $n = 0, 1, 2, \dots$, принимающие значения из $R^{(m)}$, такие, что при каждом n $\xi_n(t)$ как функция t с вероятностью 1 принадлежит $D_m[t_0, T]$. Обозначим через $F(D_m[t_0, T])$ минимальную σ -алгебру подмножеств $D_m[t_0, T]$, содержащую все подмножества вида $D_m[t_0, T] \cap A$, где $A \in F_m[t_0, T]$ (см. § 1 гл. I). Пусть μ_n — мера, определённая на $F(D_m[t_0, T])$, такая, что для всякого цилиндрического множества A

$$\mu_n(A) = P\{\xi_n(t) \in A \cap D_m[t_0, T]\}.$$

Обозначим через $F(J, \mu_0)$ совокупность функционалов $F(x(t))$, определённых на $D_m[t_0, T]$, измеримых относительно $F(D_m[t_0, T])$ и J , непрерывных во всех точках некоторого множества $D' \in D_m[t_0, T]$ такого, что $\mu_0(D') = 1$, $F(x(t))$ J непрерывно в точке $x_0(t) \in D_m[t_0, T]$, если соотношение $x_n(t) \xrightarrow{J} x_0(t)$ влечёт соотношение $F(x_n(t)) \rightarrow F(x_0(t))$.

Теорема. Если выполняются следующие условия

а) конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$,

б) для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\Delta_c(\xi_n(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

в) для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_1 - t_2| < h} P\{|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)| > \varepsilon\} = 0,$$

то для любого функционала $F(x(t))$ из $F(J, \mu_0)$ распределение $F(\xi_n(t))$ будет сходиться к распределению $F\xi_0(t)$.

Доказательство. Как вытекает из теоремы § 6 гл. I, можно построить последовательность процессов $x_n(t, \omega)$, конечномерные распределения которых будут совпадать с конечномерными распределениями $\xi_n(t)$. При этом $x_n(t, \omega)$ при каждом t будут сходиться по вероятности к процессу $x_0(t, \omega)$, конечномерные распределения которого будут совпадать с конечномерными распределениями процесса $\xi_0(t)$. Из совпадения конечномерных распределений $x_n(t, \omega)$ и $\xi_n(t)$ вытекает, что для всякого t и всякой последовательности t_k , удовлетворяющей условиям $t_k \rightarrow t$, $t_k > t$ с вероятностью 1, существует предел $x_n(t_k, \omega)$,

равный $x_n(t, \omega)$. Взяв некоторое счётное, всюду плотное на $[t_0, T]$, множество N , определим процессы $\tilde{x}_n(t, \omega)$:

$$\tilde{x}_n(t, \omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t, s \in N}} x_n(s, \omega).$$

Процессы $\tilde{x}_n(t, \omega)$ будут с вероятностью 1 непрерывны справа и стохастически эквивалентны процессам $x_n(t, \omega)$. Из сепарабельности процессов $\tilde{x}_n(t, \omega)$ и того, что $\xi_n(t)$ не имеют с вероятностью 1 разрывов второго рода, легко вывести, что процессы $x_n(t, \omega)$, а значит и $\tilde{x}_n(t, \omega)$, не имеют с вероятностью 1 разрывов второго рода. Следовательно, $\tilde{x}_n(t, \omega)$ как функции t с вероятностью 1 принадлежат $D_n[t_0, T]$. Так как для всякого цилиндрического множества A

$$\mu_n(A \cap D_m | t_0, T) = P\{\tilde{x}_n(t, \omega) \in A \cap D_m[t_0, T]\},$$

то мера μ_n будет соответствовать и процессу $x_n(t, \omega)$ на $F(D_m[t_0, T])$. Поэтому для любого функционала, измеримого относительно $F(D_m[t_0, T])$, распределения $F(\xi_n(t))$ и $F(\tilde{x}_n(t, \omega))$ совпадают. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что $F(\tilde{x}_n(t, \omega))$ сходится по вероятности к $F(\tilde{x}_0(t, \omega))$, а для этого достаточно показать, что из всякой последовательности n' можно выбрать такую подпоследовательность n'_k , чтобы $F(\tilde{x}_{n'_k}(t, \omega)) \rightarrow F(\tilde{x}_0(t, \omega))$ с вероятностью 1. Так как $F(\tilde{x}_0(t, \omega))$ непрерывно в точке $\tilde{x}_0(t, \omega)$ почти при всех ω , то теорема будет доказана, если будет установлено, что из всякой последовательности n' можно выбрать такую подпоследовательность n'_k , чтобы с вероятностью 1 $\tilde{x}_{n'_k}(t, \omega) \xrightarrow{j} (\tilde{x}_0(t, \omega))$.

Из того, что $\tilde{x}_n(t, \omega) \rightarrow \tilde{x}_0(t, \omega)$ по вероятности для всех t , вытекает, что для каждого $c > 0$

$$\sup_{t_0 < t < t - \frac{c}{2}} \inf_{t < s < t + \frac{c}{2}} |\tilde{x}_n(s, \omega) - \tilde{x}_0(s, \omega)| \rightarrow 0$$

по вероятности. Значит при любом $\varepsilon > 0$ и $c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \sup_{t_0 < t < T - \frac{c}{2}} \inf_{t < s < t + \frac{c}{2}} |\tilde{x}_n(s, \omega) - \tilde{x}_0(s, \omega)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Из условия теоремы вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \Delta_c(\tilde{x}_n(s, \omega)) > \varepsilon \} = 0.$$

Кроме того, так как $\tilde{x}_0(s, \omega) \in D_m[t_0, T]$ с вероятностью 1, то и

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathbf{P} \{ \Delta_c(\tilde{x}_0(t, \omega)) > \varepsilon \} = 0.$$

Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \rho_c(\tilde{x}_n(t, \omega), \tilde{x}_0(t, \omega)) > \varepsilon \} = 0.$$

Пусть $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Обозначим через c_m стремящуюся к нулю последовательность, для которой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \rho_{c_m}(x_n(t, \omega), \tilde{x}_0(t, \omega)) > \varepsilon_m \} < \frac{1}{m^2}.$$

Пусть N_m такой номер, что при $n > N_m$

$$\mathbf{P} \{ \rho_{c_m}(x_n(t, \omega), x_0(t, \omega)) > \varepsilon_m \} < \frac{1}{m^2}.$$

Если n_m — любая последовательность, для которой $n_m > N_m$, то на основании леммы Бореля — Контелли с вероятностью 1 существует такой номер m_0 , что при $m > m_0$ $\rho_{c_m}(\tilde{x}_{n_m}(t, \omega), \tilde{x}_0(t, \omega)) \leq \varepsilon_m$, т. е. $\rho_{c_m}(\tilde{x}_{n_m}(t, \omega), \tilde{x}_0(t, \omega)) \rightarrow 0$ с вероятностью 1.

Из теоремы § 2 вытекает, что $\tilde{x}_{n_m}(t, \omega) \xrightarrow{J} \tilde{x}_0(t, \omega)$ с вероятностью 1. Теорема доказана.

§ 4. Условия сходимости конечномерных распределений

В этом параграфе будут изучены условия сходимости конечномерных распределений процессов $\xi^n(t)$, введенных в § 1, к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, являющегося решением уравнения (1.8) гл. 3.

Пусть $P_{n,k}(x, A)$ переходная вероятность в цепи Маркова $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ на k -ом шаге, т. е. для всякого борелевского множества A из R^m с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\mathbf{P} \{ \xi_{k+1}^{(n)} \in A / \xi_k^{(n)} \} = P_{n,k}(\xi_k^{(n)}, A).$$

Рассмотрим функции $f_k^{(n)}(x, u)$, для которых выполняются соотношения

$$P_{n,k}(x, A) = (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int \frac{du}{|u|^{m+1}} \quad (4.1)$$

$$x + f_k^{(n)}(x, u) \in A$$

для всякого борелевского множества A из $R^{(m)}$, не содержащего точки 0, и $f_k^{(n)}(x, u) = 0$ при $|u| \leq r_k^{(n)}$, где $r_k^{(n)}$ таково, что

$$(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| > r_k^{(n)}} \frac{du}{|u|^{m+1}} = 1$$

(существование такой функции вытекает из леммы § 4 гл. 3).

Пусть далее $\mu_k^{(n)}$ случайные меры в $R^{(m)}$, независимые между собой при разных k и обладающие следующим свойством: для каждого борелевского множества A из $R^{(m)}$ $\mu_k^{(n)}(A)$ принимает лишь значения 0 и 1, причём

$$\mathbf{P} \{ \mu_k^{(n)}(A) = 1 \} = (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{\substack{u \in A \\ |u| > r_k^{(n)}}} \frac{du}{|u|^{m+1}}.$$

Рассмотрим величину $\bar{\xi}_0^{(n)}$, не зависящую от $\mu_k^{(n)}$, и определим $\bar{\xi}_k^{(n)}$ соотношением:

$$\bar{\xi}_{k+1}^{(n)} = \bar{\xi}_k^{(n)} + \int f_k^{(n)}(\bar{\xi}_k^{(n)}, u) \mu_k^{(n)}(du). \quad (4.2)$$

Как видно, $\bar{\xi}_k^{(n)}$ будет цепью Маркова с такими же переходными вероятностями, что и $\xi_k^{(n)}$. Поэтому совместное распределение величин $\bar{\xi}_k^{(n)}$ будет совпадать с совместным распределением величин $\xi_k^{(n)}$, если только распределение $\bar{\xi}_0^{(n)}$ будет совпадать с распределением $\xi_0^{(n)}$. В дальнейшем поэтому будем вместо величин $\xi_k^{(n)}$ рассматривать величины $\bar{\xi}_k^{(n)}$, предполагая, что распределение $\bar{\xi}_0^{(n)}$ совпадает с распределением $\xi_0^{(n)}$.

Выберем δ_n так, чтобы $r_k^{(n)} < \delta_n$, и рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} B_k^{(n)}(z) = & (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z)^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} - \\ & - \left[(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

((f, z) обозначает скалярное произведение f и z). Пусть $e_{(1)}^{(n)}(k, x)$, $e_2^{(n)}(k, x)$, \dots , $e_m^{(n)}(k, x)$ — канонический базис этой квадратичной формы, а $\lambda_1^{(n)}(k, x) \geq \dots \geq \lambda_m^{(n)}(k, x)$ — канонические коэффициенты этой квадратичной формы. Положим

$$b_i^{(n)}(k, x) = \sqrt{\lambda_i^{(n)}(k, x)} e_i^{(n)}(k, x).$$

$$\omega_n^{(i)}(k, x) = \frac{1}{\lambda_i^{(n)}(k, x)} (b_i^{(n)}(k, x), \int_{|u| < \delta_n} f_k^{(n)}(x, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du)), \quad (4.4)$$

где $\bar{\mu}_k^{(n)}(A) = \mu_k^{(n)}(A) - M \mu_k^{(n)}(A)$. Из (4.4) вытекает, что

$$\int_{|u| < \delta_n} f_k^{(n)}(x, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du) = \sum_{i=1}^m b_i^{(n)}(k, x) \omega_n^{(i)}(k, x). \quad (4.5)$$

Так как

$$\begin{aligned} M \left(z, \int_{|u| < \delta_n} f_k^{(n)}(x, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du) \right)^2 &= M \left(\int_{|u| < \delta_n} (z, f_k^{(n)}(x, u)) \bar{\mu}_k^{(n)}(du) \right)^2 = \\ &= M \left[\int_{|u| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z) \mu_k^{(n)}(du) \right]^2 - \left[(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right]^2 = \\ &= M \left[\int_{|u| < \delta_n} \int_{|v| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z) (f_k^{(n)}(x, v), z) \mu_k^{(n)}(du) \mu_k^{(n)}(dv) \right] - \\ &\quad - \left[(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| < \delta_n} (f_k^{(n)}(x, u), z) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right]^2 = B_k^{(n)}(z) \end{aligned}$$

$(\mu_k^{(n)}(du) \cdot \mu_k^{(n)}(dv) = 0$ при не пересекающихся du и dv , $[\mu_k^{(n)}(du)]^2 = \mu_k^{(n)}(du)$, то из (4.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} B_k^{(n)}(z) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(n)}(k, x) (e_i^{(n)}(k, x), z)^2 = \\ &= \sum_{i, j=1}^m (b_i^{(n)}(k, x), z) (b_j^{(n)}(k, x), z) M \omega_n^{(i)}(k, x) \omega_n^{(j)}(k, x) = \\ &= \sum_{i, j=1}^m \sqrt{\lambda_i^{(n)}(k, x) \lambda_j^{(n)}(k, x)} (e_i^{(n)}(k, x), z) (e_j^{(n)}(k, x), z) \times \\ &\quad \times M \omega_n^{(i)}(k, x) \cdot \omega_n^{(j)}(k, x). \end{aligned}$$

Поскольку это справедливо для любого z , то

$$M \omega_n^{(i)}(k, x) \omega_n^{(j)}(k, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (4.6)$$

Заметим, что $\omega_n^{(i)}(k, x)$ является случайной величиной, зависящей лишь от $\bar{\mu}_k^{(n)}$. Положим далее

t

$$b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, x) = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}}} b_i^{(n)}(h, x),$$

$$a^{(n)}(t_k^{(n)}, x) = \int f_k^{(n)}(x, u) \frac{du}{|u|^{m+1}},$$

$$f^{(n)}(t_k^{(n)}, x, u) = \begin{cases} 0 & \text{при } |u| \leq \delta_n, \\ f_k^{(n)}(x, u) & \text{при } |u| > \delta_n. \end{cases}$$

Тогда уравнение (4.2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{k+1}^{(n)} = \bar{\xi}_k^{(n)} + a^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)})(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^m b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) \times \\ \times \omega_{(n)}^i(t_k^{(n)}) + \int f^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\omega_n^i(t_k^{(n)}) = \omega_n^i(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) \sqrt{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}}$.

Для величин $\omega_n^i(t_k^{(n)})$ справедлива лемма 1.

Лемма 1. Обозначим через $F_k^{(n)}$ минимальную σ -алгебру событий, относительно которой измеримы $\bar{\xi}_r^{(n)}$ и $\mu_r^{(n)}(A)$ для всякого борелевского множества A и $r < k$. Тогда

а) $M(\omega_n^i(t_k^{(n)}) / F_k^{(n)}) = 0$,

б) $M(\omega_n^i(t_k^{(n)}) \omega_n^j(t_k^{(n)}) / F_k^{(n)}) = \begin{cases} t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Доказательство этой леммы вытекает из формулы (4.6), если учесть, что мера $\mu_k^{(n)}$ не зависит от σ -алгебры F_n^n . Покажем, что в том случае, когда $a^{(n)}(t, x)$, $b_i^{(n)}(t, x)$ и $f^{(n)}(t, x, u)$ сходятся в определённом смысле к $a(t, x)$, $b_i(t, x)$ и $f(t, x, u)$ и $\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \rightarrow 0$, конечномерные распределения процесса $\bar{\xi}_k^{(n)}(t)$, определённого соотношением $\bar{\xi}^{(n)}(t) = \bar{\xi}_k^{(n)}$ при $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$, будут сходиться к конечномерным распределениям решения уравнения (1.8) гл. 3, если распределение $\xi^{(n)}$ будет сходиться к распределению $\xi(t_0)$.

Предварительно установим некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 2. Пусть выполняются условия

1) при некотором $K > 0$

$$\begin{aligned} (T - t_0) |a(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^m |b_i(t, x)|^2 + \int |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \\ \leq K^2 (1 + |x|^2); \end{aligned}$$

2) существует такое $L > 0$, что

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + \sum_{i=1}^m |b_i(t, x) - b_i(t, y)|^2 + \\ + \int |f(t, x, u) - f(t, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L |x - y|^2;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |M| a(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - a^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)})|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m M |b_i(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)})|^2 + \right. \\ \left. + \int M |f(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u) - f^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = 0.$$

Положим $\bar{\eta}^{(n)}(t) = \eta_k^{(n)}$ при $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$,

$$\bar{\eta}_{k+1}^{(n)} = \bar{\eta}_k^{(n)} + a(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)})(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) + \sum_{i=1}^m b(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)}) \omega_n^i(t_k^{(n)}) + \\ + \int f(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)}, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du), \quad (4.8)$$

а $\bar{\eta}_0^{(n)} = \bar{\xi}_0^{(n)}$. Тогда, если $\sup_n M |\bar{\xi}_0^{(n)}|^2 < \infty$, то для всех t $M |\bar{\eta}^{(n)}(t) - \bar{\xi}^{(n)}(t)|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из формул (4.7) и (4.8) вытекает, что

$$M |\bar{\xi}_{k+1}^{(n)} - \bar{\eta}_{k+1}^{(n)}|^2 \leq M |\bar{\xi}_k^{(n)} - \eta_k^{(n)}|^2 + \\ + 2M (\bar{\xi}_k^{(n)} - \bar{\eta}_k^{(n)}, a^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - a(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)}))(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) + \\ + (m+2) \left[\sum_{i=1}^m M |b_i(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - b_i(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)})|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) + \right. \\ \left. + (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int M |f^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u) - f(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)}, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \\ \left. + M |a^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - a(t_k^{(n)}, \bar{\eta}_k^{(n)})|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})^2 \right]. \quad (4.9)$$

Пусть $\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) < 1$, $H = 2(m+3)L^2 + 1$,

$$\alpha_n^{(k)} = M |a(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) - a^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)})|^2 + \sum_{i=1}^m M |b_i(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}) -$$

$$-b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)})|^2 + \int M |f(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u) - f^{(n)}(t_k^{(n)}, \bar{\xi}_k^{(n)}, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}.$$

Тогда из условия 2 и (4.9) получается неравенство:

$$\begin{aligned} M |\bar{\xi}_{k+1}^{(n)} - \bar{\eta}_{k+1}^{(n)}|^2 &\leq M |\bar{\xi}_k^{(n)} - \bar{\eta}_k^{(n)}|^2 (1 + H(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})) + \\ &+ H \alpha_n^{(k)}(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \leq M |\bar{\xi}_k^{(n)} - \bar{\eta}_k^{(n)}|^2 e^{H(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})} + \\ &+ H \alpha_n^{(k)}(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Так как $M |\bar{\xi}_0^{(n)} - \bar{\eta}_0^{(n)}|^2 = 0$, то по индукции устанавливаем неравенство:

$$M |\bar{\xi}_{k+1}^{(n)} - \bar{\eta}_{k+1}^{(n)}|^2 \leq H \sum_{i=0}^k \alpha_n^{(i)} e^{H(t_{i+1}^{(n)} - t_0^{(n)})} (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}).$$

На основании условия 3 $\sum_{i=0}^n \alpha_n^{(i)} (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) \rightarrow 0$. Таким обра-

зом, из предыдущего неравенства мы и получаем доказательство леммы.

Лемма 3. Пусть существует не зависящее от n число K такое, что

$$\begin{aligned} |a^{(n)}(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^m |b_i^{(n)}(t, x)|^2 + \\ + \int |f^{(n)}(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K(1 + |x|^2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

а $\bar{\xi}_k^{(n)}$ определяется соотношениями (4.7). Тогда, если $\sup_n M |\bar{\xi}_0^{(n)}|^2 < \infty$, то существуют такие H_1 и H_2 , что при всех n

$$M |\bar{\xi}_i^{(n)}|^2 \leq H_1, \quad M |\bar{\xi}_i^{(n)} - \bar{\xi}_j^{(n)}|^2 \leq H_2 |t_i^{(n)} - t_j^{(n)}|.$$

Доказательство. Из условия (4.10), точно так, как в предыдущей лемме, можем вывести неравенство:

$$M |\bar{\xi}_{k+1}^{(n)}|^2 \leq M |\bar{\xi}_k^{(n)}|^2 (1 + H(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})) \leq M |\bar{\xi}_k^{(n)}|^2 e^{H(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})},$$

где $H = K(m+3) + 1$. Следовательно,

$$M |\bar{\xi}_{k+1}^{(n)}|^2 \leq M |\bar{\xi}_0^{(n)}|^2 e^{H(1 - t_0)}. \quad (4.11)$$

При $k < j$

$$\begin{aligned}
M |\bar{\xi}_j^{(n)} - \bar{\xi}_k^{(n)}|^2 &\leq M \left| \sum_{r=k}^{j-1} [a^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}) (t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)}) + \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^m b_i^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}) (\bar{w}_r^{(n)}(t_r^{(n)}) + \\
&\quad \left. + \int f^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}, u) \bar{\mu}_r^{(n)}(du)] \right|^2.
\end{aligned}$$

Используя лемму 1, (4.10) и (4.11), находим, что при $|t_j - t_k| < 1$

$$\begin{aligned}
M |\bar{\xi}_j^{(n)} - \bar{\xi}_k^{(n)}|^2 &\leq (m+2) \left\{ M \left| \sum_{r=k}^{j-1} a^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}) (t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)}) \right|^2 + \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^m M \left| \sum_{r=k}^{j-1} b_i^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}) \bar{w}_i^{(n)}(t_r^{(n)}) \right|^2 + \\
&\quad \left. + M \left| \sum_{r=k}^{j-1} \int f^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}, u) \bar{\mu}_r^{(n)}(du) \right|^2 \right\} \leq \\
&\leq (m+2) \sum_{r=k}^{j-1} (M |a^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)})|^2 + \sum_{i=1}^m M |b_i^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)})|^2 + \\
&\quad + \int M |f^{(n)}(t_r^{(n)}, \bar{\xi}_r^{(n)}, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}}) (t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)}) \leq \\
&\leq (m+2) K \sum_{r=k}^{j-1} (M |\bar{\xi}_r^{(n)}|^2 + 1) (t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)}) \leq \\
&\leq (m+2) K [M |\bar{\xi}_0^{(n)}|^2 + 1] He^{H(T-t_0)} (t_j^{(n)} - t_k^{(n)}). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть

$$\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad \frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_n^2} \rightarrow 0$$

$$\text{и} \quad \sup_{i,k} |w_i^{(n)}(t_k)| \leq \varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Положим

$$w_i^{(n)}(t) = \sum_{t_{k-1}^{(n)} < t} w_i^{(n)}(t_k^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\zeta^{(n)}(t) = \sum_{t_{k-1}^{(n)} < t} \left(\int_{\delta_n < |u| < 1} u \bar{\mu}_k^{(n)}(du) + \int_{|u| > 1} u \mu_k^{(n)}(du) \right).$$

Пусть, далее, $w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)$ независимые между собой процессы броуновского движения такие, что $w(t_0) = 0$, а

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t \int_{|u| < 1} u q(ds \times du) + \int_{t_0}^t \int_{|u| > 1} u p(ds \times du),$$

где p и q не зависящие от $w_1(t), \dots, w_m(t)$ пуассоновские меры с независимыми значениями, определённые в § 4 гл. 2. Тогда совместные распределения процессов

$$w_1^{(n)}(t), w_2^{(n)}(t), \dots, w_m^{(n)}(t), \zeta^{(n)}(t)$$

будут сходиться к совместным распределениям процессов

$$w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t), \zeta(t).$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что каковы бы ни были $C > 0$, вещественные числа $\lambda_j^{(n)}(k)$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяющие неравенству $|\lambda_j^{(n)}(k)| \leq C$, а также векторы $z_k^{(n)}$, для которых выполняется $|z_k^{(n)}| \leq C$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[M \exp \left\{ i \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n)}(k) \omega_j^{(n)}(t_k^{(n)}) + \int_{\delta_n < |u| < 1} (z_k^{(n)}, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{|u| > 1} (z_k^{(n)}, u) \mu_k^{(n)}(du) \right) \right\} - M \exp \left\{ i \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n)}(k) [\omega_j(t_{k+1}^{(n)}) - \omega_j(t_k^{(n)})] + \right. \right. \\ & \left. \left. + (z_k^{(n)}, \zeta(t_{k+1}^{(n)}) - \zeta(t_k^{(n)})) \right) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для вывода формулы (4.13) нужно ввести следующие обозначения:

$$\varphi_k^{(n)} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n)}(k) \omega_j^{(n)}(t_k^{(n)}),$$

$$\psi_k^{(n)} = \int_{\delta_n < |u| < 1} (z_k^{(n)}, u) \bar{\mu}_k^{(n)}(du) + \int_{|u| > 1} (u, z_k^{(n)}) \mu_k^{(n)}(du),$$

$$\chi_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}(|u| > \delta_n), \bar{\chi}_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}(|u| \leq \delta_n)$$

($\{|u| > \delta_n\}$ и $\{|u| \leq \delta_n\}$ множества тех u , для которых выполняются указанные в скобках неравенства).

Пусть $F_k^{(n)}$ σ -алгебра, определенная в лемме 1. Величины $\psi_k^{(n)}$, $\chi_k^{(n)}$, $\bar{\chi}_k^{(n)}$ не зависят от $F_k^{(n)}$. Будем обозначать условное математическое ожидание относительно $F_k^{(n)}$ через M_k . Из определения $\omega_j^{(n)}(t_k^{(n)})$ вытекает, что при $\chi_k^{(n)} = 1$ $\varphi_k^{(n)}$ является функцией только $\bar{\xi}_k^{(n)}$. Обозначим значение $\varphi_k^{(n)}$ при $\chi_k^{(n)} = 1$ через $\alpha_k^{(n)}$. Тогда

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{M_k \varphi_k^{(n)} \chi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}}.$$

При $\bar{\chi}_k^{(n)} = 1$

$$\psi_k^{(n)} = - (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{n+1}},$$

эту величину будем обозначать через $\beta_k^{(n)}$. Тогда

$$M_k (e^{i\psi_k^{(n)}} \varphi_k^{(n)}) = \alpha_k^{(n)} M_k \chi_k^{(n)} e^{i\psi_k^{(n)}} + e^{i\beta_k^{(n)}} M_k \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}. \quad (4.14)$$

Поскольку

$$M_k \varphi_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} M \chi_k^{(n)} + M \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} 0 &= M_k (\chi_k^{(n)} e^{i\psi_k^{(n)}}) \alpha_k^{(n)} M \chi_k^{(n)} + M_k (\chi_k^{(n)} e^{i\psi_k^{(n)}}) M_k (\bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}) + \\ &+ e^{i\beta_k^{(n)}} M \bar{\chi}_k^{(n)} \cdot M \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} e^{i\beta_k^{(n)}} M \bar{\chi}_k^{(n)} \cdot M \chi_k^{(n)}. \end{aligned}$$

Вычитая последнее равенство из (4.14), получим

$$\begin{aligned} M_k (e^{i\psi_k^{(n)}} \varphi_k^{(n)}) &= \alpha_k^{(n)} M \chi_k^{(n)} \cdot M_k (\chi_k^{(n)} e^{i\psi_k^{(n)}}) + \\ &+ M \chi_k^{(n)} \cdot e^{i\beta_k^{(n)}} \cdot M_k (\bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}) - M_k \chi_k^{(n)} e^{i\psi_k^{(n)}} \cdot M_k \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)} - \\ &- \alpha_k^{(n)} \cdot e^{i\beta_k^{(n)}} M \bar{\chi}_k^{(n)} \cdot M \chi_k^{(n)} = - M_k (\chi_k^{(n)} (e^{i\psi_k^{(n)}} - \\ &- e^{i\beta_k^{(n)}})) M_k \bar{\chi}_k^{(n)} (\varphi_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{M_k \chi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}} = - \frac{M_k \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}}$$

($M_k (\chi_k^{(n)} + \bar{\chi}_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)} = 0$), из последнего соотношения находим, что

$$\begin{aligned} M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \varphi_k^{(n)} &= - M \chi_k^{(n)} (e^{i\psi_k^{(n)}} - e^{i\beta_k^{(n)}}) M_k \bar{\chi}_k^{(n)} \varphi_k^{(n)} \left(1 + \frac{M \bar{\chi}_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}} \right) = \\ &= \frac{M_k \chi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}} M_k (\chi_k^{(n)} (e^{i\psi_k^{(n)}} - e^{i\beta_k^{(n)}})). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши и лемму 1, получим

$$\left| \frac{M_k \chi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}} \right| \leq \sqrt{\frac{M_k |\varphi_k^{(n)}|^2}{M \chi_k^{(n)}}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^m |\lambda_j^{(n)}(k)|^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})} \left(\sqrt{(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{|u| > \delta_n} \frac{du}{|u|^{m+1}}} \right)^{-1}.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, убеждаемся, что при некотором C_1

$$\left| \frac{M_k \chi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{M \chi_k^{(n)}} \right| \leq C_1 \sqrt{\delta_n}.$$

Далее находим

$$|M_k \chi_k^{(n)} (e^{i\psi_k^{(n)}} - e^{i\beta_k^{(n)}})| = |M_k \chi_k^{(n)} \left(\exp \left\{ i \int_{\delta_n < |u| < \infty} (u, z_k^{(n)}) \mu_k^{(n)}(du) - \right. \right.$$

$$\left. - i \int_{\delta_n < |u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{m+1}} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \right\} - \exp \left\{ -i \int_{\delta_n < |u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{m+1}} (t_{k+1}^{(n)} - \right.$$

$$\left. - t_k^{(n)}) \right\} \left| M_k \chi_k^{(n)} \left(\exp \left\{ i \int_{\delta_n < |u| < \infty} (u, z_k^{(n)}) \mu_k^{(n)}(du) \right\} - 1 \right) \right| =$$

$$= (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left| \int_{\delta_n < |u| < \infty} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right| \leq (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \times$$

$$\times \left[\int_{\delta_n < |u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{m+1}} + 2 \int_{|u| > 1} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right].$$

Используя переход к полярным координатам, находим, что при некотором $H > 0$

$$\int_{\delta_n < |u| < 1} |u| \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq H \int_{\delta_n}^1 \frac{dr}{r} = H \ln \frac{1}{\delta_n}.$$

Поэтому существует такая постоянная C_2 , что

$$|M_k (\chi_k^{(n)} (e^{i\psi_k^{(n)}} - e^{i\beta_k^{(n)}}))| \leq C_2 \ln (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \frac{1}{\delta_n}.$$

Таким образом

$$|M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \varphi_k^{(n)}| = O\left(\ln \frac{1}{\delta_n} \cdot V\overline{\delta_n}\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}).$$

Аналогично устанавливаем, что

$$|M_k e^{i\psi_k^{(n)}} [(\varphi_k^{(n)})^2 - M_k (\varphi_k^{(n)})^2]| = O\left(\ln \frac{1}{\delta_n} V\overline{\delta_n}\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}).$$

Наконец отметим еще, что

$$\begin{aligned} |M_k e^{i\psi_k^{(n)}} (\varphi_k^{(n)})^3| &\leq M_k |\varphi_k^{(n)}|^3 \leq \sup |\varphi_k^{(n)}| \cdot M_k |\varphi_k^{(n)}|^2 = \\ &= O(\varepsilon_n) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Используя все полученные выше оценки, находим:

$$\begin{aligned} M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \cdot e^{i\varphi_k^{(n)}} &= M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \left(1 + i\varphi_k^{(n)} - \frac{1}{2} (\varphi_k^{(n)})^2 + O(|\varphi_k^{(n)}|^3)\right) = \\ &= M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \left(1 - \frac{1}{2} M_k (\varphi_k^{(n)})^2\right) + O\left(\varepsilon_n + V\overline{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n}\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = \\ &= M_k e^{i\psi_k^{(n)}} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{(n)}(k))^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})\right) + O\left(\varepsilon_n + V\overline{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n}\right) \times \\ &\times (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = M e^{i\psi_k^{(n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{(n)}(k))^2 (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})\right\} + \\ &+ O\left(\varepsilon_n + V\overline{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n} + \max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})\right). \end{aligned}$$

Подсчитаем $M e^{i\psi_k^{(n)}}$

$$\begin{aligned} M e^{i\psi_k^{(n)}} &= \exp\left\{-i(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{\delta_n < |u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{m+1}}\right\} \times \\ &\times M \exp\left\{i \int_{\delta_n < |u| < \infty} (u, z_k^{(n)}) \mu_k^{(n)}(du)\right\} = \exp\left\{-i(t_{k+1}^{(n)} - \right. \\ &- t_k^{(n)}) \int_{\delta_n < |u| < 1} (u, z_k^{(n)}) \frac{du}{|u|^{m+1}} \left.\left(1 + (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{\delta_n < |u| < \infty} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - \right. \right. \\ &\left. \left. - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\delta_n |u| < \infty} \frac{d'u}{|u|^{m+1}} = O\left(\frac{1}{\delta_n}\right),$$

то

$$\begin{aligned} & 1 + (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{\delta_n < |u|} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} = \\ & = \exp \left\{ (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \int_{\delta_n < |u| < \infty} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\} + O\left(\frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_n^2}\right) \times \\ & \quad \times (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Me^{\psi_k^{(n)}} &= \exp \left\{ (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[\int_{\delta_n < |u| < 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1 - i(z_k^{(n)}, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{|u| > 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\} + O\left(\frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_n^2}\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = \\ & = \exp \left\{ (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[\int_{0 < |u| < 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1 - i(z_k^{(n)}, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{|u| > 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\} + O\left(\delta_n + \frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_k}\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}), \end{aligned}$$

так как

$$\int_{|u| < \delta_n} |e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1 - i(z_k^{(n)}, u)| \frac{du}{|u|^{m+1}} = O\left(\int_{|u| < \delta_n} \frac{du}{|u|^{m-1}}\right) = O(\delta_n).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_k e^{i\psi_k^{(n)} + i\varphi_k^{(n)}} &= \exp \left\{ (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{(n)}(k))^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{0 < |u| < 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1 - i(z_k^{(n)}, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \int_{|u| > 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+O\left(\varepsilon_n + \delta_n + V\sqrt{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n} + \frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_n^2} + \max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})\right) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}). \quad (4.15)$$

Учитывая соотношение

$$Me^{i \sum_{k=0}^r (\psi_k^{(n)} + \varphi_k^{(n)})} = Me^{i \sum_{k=0}^{r-1} (\psi_k^{(n)} + \varphi_k^{(n)})} M_r e^{i(\varphi_r^{(n)} + \psi_r^{(n)})},$$

из (4.15) легко вывести неравенство

$$\begin{aligned} |Me^{i \sum_{k=0}^n (\psi_k^{(n)} + \varphi_k^{(n)})} - \exp \left\{ \sum_{k=0}^n (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{(n)}(k))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{0 < |u| < 1} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - 1 - i(u, z_k^{(n)})) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \int_{|u| > 1} (e^{i(u, z_k^{(n)})} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\} \leq \\ \leq O\left(\varepsilon_n + V\sqrt{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n} + \frac{\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})}{\delta_n^2}\right) (T - t_0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так как правая часть (4.16) стремится к нулю, по условию леммы, то для доказательства (4.13), а значит и леммы, остается заметить, что

$$\begin{aligned} M \exp \left\{ i \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n)}(k) [w_j(t_{k+1}^{(n)}) - w_j(t_k^{(n)})] + (z_k^{(n)}, \zeta(t_{k+1}^{(n)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \zeta(t_k^{(n)})) \right) \right\} = \exp \left\{ \sum_{k=0}^n (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{(n)}(k))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{0 < |z| < 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1 - i(z_k^{(n)}, u)) \frac{du}{|u|^{m+1}} + \int_{|u| > 1} (e^{i(z_k^{(n)}, u)} - 1) \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 5. Если выполняются условия леммы 4 и $\zeta^{(n)}(t)$ — процесс, определенный в лемме 4, то для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{C \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\Delta_C(\zeta^{(n)}(t)) > \varepsilon\} = 0$$

(определение величины $\Delta C(x(t))$ дано в § 2).

Доказательство. Заметим, что $\zeta^{(n)}(t)$ является процессом с независимыми приращениями, а значит и процессом Маркова. Кроме того,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \{ |\zeta^{(n)}(t+h) - \zeta^{(n)}(t)| > \varepsilon / \zeta^{(n)}(t) \} = \mathbf{P} \{ |\zeta^{(n)}(t+h) - \zeta^{(n)}(t)| > \varepsilon \} = \\
& = \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{t_k^{(n)} \in (t, t+h)} \left(\int_{0 < |u| < 1} u \bar{\mu}_k^{(n)}(du) + \int_{|u| > 1} u \mu_k^{(n)}(du) \right) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} \left| \sum_{t_k^{(n)} \in (t, t+h)} \int_{0 < |u| < 1} u \bar{\mu}_k^{(n)}(du) \right|^2 + \sum_{t_k^{(n)} \in (t, t+h)} \mathbf{P} \{ \mu_k^{(n)}(|u| > 1) = 1 \} < \\
& < \sum_{t_k^{(n)} \in (t, t+h)} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{0 < |u| < 1} \frac{du}{|u|^{m-1}} + \int_{|u| > 1} \frac{du}{|u|^{m+1}} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, для процесса $\zeta^{(n)}(t)$ выполняется соотношение, аналогичное соотношению (5.4) § 5 этой главы. Поэтому для этого процесса будет справедливо и соотношение (5.1) § 5 этой главы, из которого и вытекает доказательство леммы (упомянутые выводы § 5 не опираются на выводы этого параграфа).

Лемма 6. Пусть выполняются условия 1 и 2 леммы 2 и условия леммы 4, а также $a(t, x)$, $b_j(t, x)$, $f(t, x, u)$ удовлетворяют условиям теоремы существования § 3 гл. 3, а $f(t, x, u)$ при всех t и x непрерывно по u почти при всех u . Определим $\eta_n(t)$ так, как в лемме 2. Тогда, если распределение $\eta_n(t_0)$ будет сходиться к распределению $\xi(t_0)$ и $\sup_n \mathbf{M} |\eta_n(t_0)|^2 < \infty$, то конеч-

номерные распределения процессов $\eta_n(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, являющегося решением уравнения (1.8) гл. 3.

Доказательство. Пусть $\zeta^{(n)}(t)$ и $w_j^{(n)}(t)$ определены так, как в лемме 4. На основании следствия 2 из теоремы § 6 гл. 1 можем выбрать последовательность натуральных чисел n' и построить процессы $\tilde{\eta}_{n'}(t)$, $\tilde{w}_1^{(n')}(t)$, ..., $\tilde{w}_m^{(n')}(t)$, $\tilde{\zeta}^{(n')}(t)$, совместные распределения которых совпадают с совместными распределениями процессов $\eta_{n'}(t)$, $w_1^{(n')}(t)$, ..., $w_m^{(n')}(t)$, $\zeta^{(n')}(t)$; причем при $n' \rightarrow \infty$ $\tilde{\eta}_{n'}(t)$, $\tilde{w}_1^{(n')}(t)$, ..., $\tilde{w}_m^{(n')}(t)$, $\tilde{\zeta}^{(n')}(t)$ сходятся по вероятности к некоторым процессам $\tilde{\eta}(t)$, $\tilde{w}_1(t)$, ..., $\tilde{w}_m(t)$, $\tilde{\zeta}(t)$. Очевидно, что совместные распределения процессов $\tilde{w}_1(t)$, ..., $\tilde{w}_m(t)$, $\tilde{\zeta}(t)$ таковы, как и совместные распределения процессов $w_1(t)$, ..., $w_m(t)$, $\zeta(t)$, рассмотренных в лемме 4.

Пусть $\tilde{p}^{(n')}(A)$ для каждого борелевского множества $A \subset [t_0, T] \times R^{(m)}$ обозначает число скачков процесса $\tilde{\zeta}^{(n')}(t)$, для которых $(t, \tilde{\zeta}^{(n')}(t+0) - \tilde{\zeta}^{(n')}(t-0)) \in A$, $\tilde{q}^{(n')}(A) = \tilde{p}^{(n')}(A)$ — $\tilde{\mathbf{M}}p^{(n')}(A)$. Тогда из совпадения совместных распределений про-

цессов $\tilde{\eta}_{n'}(t), \tilde{w}_1^{(n')}(t), \dots, \tilde{w}_m^{(n')}(t), \tilde{\zeta}^{(n')}(t)$ и процессов $\eta_{n'}(t), w_1^{(n')}(t), \dots, w_m^{(n')}(t), \zeta^{(n')}(t)$, а также формулы (4.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^{(n')}(t_{k+1}^{(n')}) &= \tilde{\eta}^{(n')}(t_k^{(n')}) + a(t_k^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_k^{(n')}))(t_{k+1}^{(n')} - t_k^{(n')}) + \\ &+ \sum_{j=1}^m b(t_k^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_k^{(n')})) [\tilde{w}_j^{(n')}(t_{k+1}^{(n')}) - \tilde{w}_j^{(n')}(t_k^{(n')})] + \\ &+ \int_{\substack{t_k^{(n')} < s < t_{k+1}^{(n')} \\ u \in R^{(m)}}} f(t_k^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_k^{(n')}), u) \tilde{q}^{(n')}(ds \times du). \end{aligned}$$

Из этого соотношения получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^{(n')}(t) &= \tilde{\eta}^{(n')}(0) + \sum_{t_{i+1}^{(n')} < t} a(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')}))(t_{i+1}^{(n')} - t_i^{(n')}) + \\ &+ \sum_{t_{i+1}^{(n')} < t} \sum_{j=1}^m b(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')})) [\tilde{w}_j^{(n')}(t_{i+1}^{(n')}) - \tilde{w}_j^{(n')}(t_i^{(n')})] + \\ &+ \sum_{\substack{t_{i+1}^{(n')} < t \\ t_i^{(n')} < s < t_{i+1}^{(n')} \\ u \in R^{(m)}}} f(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')}), u) \tilde{q}^{(n')}(ds \times du). \quad (4.17) \end{aligned}$$

Эта формула аналогична формуле (3.7) § 3 гл. 3, полученной при доказательстве теоремы существования § 3 гл. 3. Дальнейшее доказательство леммы почти ничем не отличается от доказательства теоремы существования. Точно так, как при доказательстве теоремы существования § 3 гл. 3, можем установить, что

$$\sum_{t_{i+1}^{(n')} < t} a(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')}))(t_{i+1}^{(n')} - t_i^{(n')}) \rightarrow \int_{t_0}^t a(s, \tilde{\eta}(s)) ds \quad (4.18)$$

по вероятности, а

$$\sum_{t_{i+1}^{(n')} < t} b(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')})) (\tilde{w}_j^{(n')}(t_{i+1}^{(n')}) - \tilde{w}_j^{(n')}(t_i^{(n')})) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^t b_i(s, \tilde{\eta}(s)) d\tilde{w}_i(s) \quad (4.19)$$

по вероятности. Установим теперь, что по вероятности

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t_{i+1}^{(n')} \leq t \\ t_i^{(n')} \leq s \leq t_{i+1}^{(n')} \\ u \in R^{(m)}}} \int f(t_i^{(n')}, \tilde{\eta}^{(n')}(t_i^{(n')}), u) \tilde{q}^{(n')}(ds \times du) \rightarrow \\ \rightarrow \int_{t_0}^t \int_{u \in R^{(m)}} f(s, \tilde{\eta}(s), u) \tilde{q}(ds \times du), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где меры \tilde{q} (а также встречающаяся ниже \tilde{p}) определяются по процессу $\tilde{\xi}(t)$, как q_0 (а также p_0) определялись по процессу $\xi_0(t)$ в лемме 4 § 3 гл. 3.

Доказательство (4.20) можно получить точно так, как доказательство аналогичных доказательству соотношений в теореме существования § 3 гл. 3 (с использованием леммы 5 § 3 гл. 3), если только установить утверждение, аналогичное утверждению леммы 4 § 3 гл. 3: для всякой почти всюду непрерывной функции $\varphi(u)$, ограниченной в каждой ограниченной области и обращающейся в нуль в некоторой окрестности нуля,

$$\int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \varphi(u) \tilde{p}^{(n')}(ds \times du) \rightarrow \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \varphi(u) \tilde{p}(ds \times du) \quad (4.21)$$

по вероятности.

Чтобы установить (4.21), заметим, что функционал

$$F^*(x(s)) = \sum_{s \in [t, t+h]} \varphi(x(s+0) - x(s-0))$$

определен на $D_m[t_0, T]$, измерим относительно $F(D_m[t_0, T])$ и принадлежит $F(J, \mu_0)$, где μ_0 — мера, соответствующая процессу $\tilde{\xi}(s)$. Далее

$$\begin{aligned} F^*(\tilde{\xi}^{(n')}(s)) &= \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \varphi(u) \tilde{p}^{(n')}(ds \times du), \\ F^*(\tilde{\xi}(s)) &= \int_t^{t+h} \int_{R^{(m)}} \varphi(u) \tilde{p}(ds \times du). \end{aligned}$$

Из леммы 5 и доказательства теоремы § 3 этой главы вытекает, что $F^*(\xi^{(n')}(s)) \rightarrow F^*(\xi(s))$ по вероятности; так что (4.21) имеет место. Из (4.21) точно так, как из леммы 4 § 3 гл. 3 при доказательстве теоремы существования выводилось (3.8) гл. 3, можно установить справедливость (4.20). Переходя теперь к пределу при $n' \rightarrow \infty$ в (4.17), получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(t) = & \tilde{\eta}(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, \tilde{\eta}(s)) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b_j(s, \tilde{\eta}(s)) d\tilde{w}_j(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{R^{(m)}} f(s, \tilde{\eta}(s), u) \tilde{q}(ds \times du).\end{aligned}$$

Так как совместные распределения величин $\tilde{\eta}(t_0), \tilde{w}_1(s), \dots, \tilde{w}_m(s), \tilde{q}$ совпадают с совместными распределениями величин $\xi(t_0), w_1(s), \dots, w_m(s), q$, фигурирующих в уравнении (1.8) гл. 3, то $\tilde{\eta}(t)$ имеет такие же конечномерные распределения, как и $\xi(t)$ в решении уравнения (1.8) гл. 3. Лемма доказана.

Объединяя результаты 2 и 6 лемм, можно утверждать справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\xi^{(n)}(t)$ построены по цепи Маркова, как указано в § 1, а $a^{(n)}(t, x), b_j^{(n)}(t, x), f^{(n)}(t, x, u)$ определены так, как было указано в этом параграфе, причем существует такая постоянная K , для которой

$$\begin{aligned}(A) |a^{(n)}(t, x)|^2 + \sum_{j=1}^m |b_j^{(n)}(t, x)|^2 + \int_{R^{(m)}} |f^{(n)}(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \\ \leq K(1 + |x|^2).\end{aligned}$$

Тогда, если существуют $a(t, x), b_j(t, x), f(t, x, u)$, удовлетворяющие условиям:

(Б) $a(t, x), b_j(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных,

(В) $f(t, x, u)$ ограничена в каждой ограниченной области изменения x и u , почти при всех u непрерывна по совокупности переменных t и x , при всех t и x непрерывна по u почти при всех u и для всех t_1 и x_1

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ x \rightarrow x_1}} \int |f(t, x, u) - f(t_1, x_1, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} = 0,$$

(Г) существуют такие K_1 и L , что

$$|a(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^m |b_i(t, x)|^2 + \int_{R^{(m)}} |f(t, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq K_1 (1 + |x|^2),$$

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 \sum_{i=1}^m |b_i(t, x) - b_i(t, y)|^2 + \\ + \int_{R^{(m)}} |f(t, x, u) - f(t, y, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq L |x - y|^2$$

для всех x и y , и, кроме того, выполняются условия:

$$(Д) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[M |a(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}(t_k^{(n)})) - a^{(n)}(t_k^{(n)}, \xi_n^{(n)}(t_k^{(n)}))|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m M |b_i(t_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}(t_k^{(n)})) - b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, \xi_n^{(n)}(t_k^{(n)}))|^2 + \right. \\ \left. + \int_{R^{(m)}} M |f(t_k^{(n)}, \xi_n^{(n)}(t_k^{(n)}), u) - f^{(n)}(t_k^{(n)}, \xi_n^{(n)}(t_k^{(n)}), u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \right] (t_{k+1}^{(n)} - \\ - t_k^{(n)}) = 0,$$

(Е) распределение $\xi^{(n)}(t_0)$ сходится к распределению $\xi(t_0)$

и

$$\sup_n M |\xi^{(n)}(t_0)|^2 < \infty,$$

то конечномерные распределения процесса $\xi^{(n)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, являющегося решением уравнения (1.8) гл. 3.

Замечание. Условие (Д) можно заменить следующим условием:

(Д') для всякого $C > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sup_{|x| < C} [|a(t_k^{(n)}, x) - a^{(n)}(t_k^{(n)}, x)|^2 + \\ + \sum_{i=1}^m |b_i(t_k^{(n)}, x) - b_i^{(n)}(t_k^{(n)}, x)|^2 +$$

$$+ \int_{u \in R^{(m)}} |f(t_k^{(n)}, x, u) - f^{(n)}(t_k^{(n)}, x, u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \Big] (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) = 0.$$

Очевидно, что выполнение (Д') влечет и выполнение (Д). Условие (Д') может оказаться более удобным для проверки.

§ 5. Предельная теорема для распределений функционалов от последовательности процессов Маркова

В этом параграфе общая теорема § 2 будет применена к частному случаю сходимости последовательности процессов, построенных в § 1 к решению уравнения (1.8) гл. 3. При этом существенным образом будут использованы условия сходимости конечномерных распределений, полученные в предыдущем параграфе.

Теорема. Пусть последовательность $\xi^{(n)}(t)$, $a(t, x)$, $b_i(t, x)$, $f(t, x, u)$ удовлетворяют условиям теоремы § 4, $\xi(t)$ — решение уравнения (1.8) гл. 3, μ — мера, соответствующая процессу $\xi(t)$ на $F(D_m[t_0, T])$. Тогда для всякого функционала $F(x(t))$ из класса $F(J, \mu)$ распределение $F(\xi^{(n)}(t))$ будет сходиться к распределению $F(\xi(t))$.

Доказательство. Поскольку конечномерные распределения процессов $\xi^{(n)}(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ (по теореме § 4), то для доказательства теоремы, как вытекает из теоремы § 2, достаточно установить соотношение

$$\lim_{c \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P \{ \Delta_c(\bar{\xi}_n^{(n)}(t)) > \varepsilon \} = 0, \quad (5.1)$$

где $\bar{\xi}^{(n)}(t)$ — процесс, определенный формулой (4.2) и имеющий такие же конечномерные распределения, как и процесс $\xi^{(n)}(t)$. Для доказательства формулы (5.1) докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ образуют цепь Маркова, причем существует такое $\alpha < 1$, что для всех $i < j$ с вероятностью 1 выполняется соотношение:

$$P \{ |\xi_j - \xi_i| > \varepsilon / \xi_i \} \leq \alpha.$$

Тогда

$$P \{ \sup_{i,j} |\xi_j - \xi_i| > 4\varepsilon \} < \frac{2}{1-\alpha} P \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon \}.$$

Доказательство Покажем сначала, что

$$P \{ \sup_j |\xi_j - \xi_1| > 2\varepsilon \} < \frac{1}{1-\alpha} P \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon \}. \quad (5.2)$$

Действительно:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon \} \geq \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon, \sup_j |\xi_j - \xi_1| > 2\varepsilon \} = \\
& = \sum_{k=2}^l \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_2| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_1 - \xi_{k-1}| \leq 2\varepsilon, |\xi_1 - \xi_k| > 2\varepsilon, |\xi_1 - \\
& - \xi_l| > \varepsilon \} \geq \sum_{k=2}^l \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_2| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_1 - \xi_{k-1}| \leq 2\varepsilon, |\xi_1 - \xi_k| > \\
& > 2\varepsilon, |\xi_k - \xi_l| \leq \varepsilon \} \geq (1 - \alpha) \sum_{k=2}^l \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_2| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_1 - \xi_{k-1}| \leq \\
& \leq 2\varepsilon, |\xi_1 - \xi_k| > 2\varepsilon \};
\end{aligned}$$

так как $\mathbf{P} \{ |\xi_k - \xi_l| \leq \varepsilon / \xi_k \} \geq 1 - \alpha$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon \} & \geq \sum_{k=2}^l \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_2| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_1 - \xi_{k-1}| \leq \\
& \leq 2\varepsilon, |\xi_1 - \xi_k| > 2\varepsilon \} = \mathbf{P} \{ \sup_k |\xi_1 - \xi_k| > 2\varepsilon \}.
\end{aligned}$$

Из этого неравенства и вытекает (5.2). Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \{ \sup_{i,j} |\xi_i - \xi_j| > 4\varepsilon \} \leq \mathbf{P} \{ \sup_i |\xi_i - \xi_1| > 2\varepsilon \} + \\
& + \mathbf{P} \{ \sup_j |\xi_j - \xi_1| > 2\varepsilon \} \leq \frac{2}{1-\alpha} \mathbf{P} \{ |\xi_l - \xi_1| > \varepsilon \}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. В условиях леммы 1

$$\mathbf{P} \{ \sup_{i < j < k} (|\xi_i - \xi_j|; |\xi_j - \xi_k|) > 4\varepsilon \} < \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \mathbf{P} \{ |\xi_1 - \xi_l| > \varepsilon \}. \quad (5.3)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \{ \sup_{i < j < k} (|\xi_i - \xi_j|; |\xi_j - \xi_k|) > 4\varepsilon \} \leq \\
& \leq \sum_{k < j} \mathbf{P} \{ |\xi_2 - \xi_1| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_{k-1} - \xi_1| \leq 2\varepsilon, |\xi_k - \xi_1| > 2\varepsilon, |\xi_{k+1} - \\
& - \xi_k| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_{j-1} - \xi_k| \leq 2\varepsilon, |\xi_j - \xi_k| > 2\varepsilon \} \leq \\
& \leq \sum_k \mathbf{M} (\mathbf{P} \{ |\xi_2 - \xi_1| \leq 2\varepsilon, \dots, |\xi_{k-1} - \xi_1| \leq \\
& \leq 2\varepsilon, |\xi_k - \xi_1| > 2\varepsilon / \xi_k \} \mathbf{P} \{ \sup_{j=k+1, \dots, l} |\xi_j - \xi_k| > 2\varepsilon / \xi_k \} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \{ \sup_k |\xi_k -
\end{aligned}$$

$$- \xi_1 | > 2\varepsilon \} \leq \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \mathbf{P} \{ |\xi_t - \xi_1| > \varepsilon \}$$

(здесь два раза использовались неравенства (5.2)).

Лемма доказана.

Лемма 3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое H_ε , что при $t_k^{(n)} - t_i^{(n)} > 0$

$$\mathbf{P} \{ |\bar{\xi}^{(n)}(t_k^{(n)}) - \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})| > \varepsilon / \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)}) \} \leq (H_\varepsilon (|\bar{\xi}_n(t_i^{(n)})|^2 + 1) \times \\ \times (t_k^{(n)} - t_i^{(n)}).$$

Доказательство. Имеем:

$$\mathbf{P} \{ |\bar{\xi}^{(n)}(t_k^{(n)}) - \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})| > \varepsilon / \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)}) \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} (|\bar{\xi}^{(n)}(t_k^{(n)}) - \\ - \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})|^2 / \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})).$$

Точно таким образом, как было получено (4.12) при доказательстве леммы 3 § 4 (взяв только условные математические ожидания), устанавливаем, что

$$\mathbf{M} (|\bar{\xi}^{(n)}(t_k^{(n)}) - \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})|^2 / \bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)}) \leq \\ \leq (m+2) K |\bar{\xi}^{(n)}(t_i^{(n)})|^2 e^{H(T-t_0)} + 1) (t_k^{(n)} - t_i^{(n)}).$$

Из этих двух неравенств и вытекает доказательство леммы.

Лемма 4. Величина $\sup_t |\bar{\xi}^{(n)}(t)|$ ограничена по вероятности равномерно относительно n .

Доказательство этой леммы вытекает из доказательства леммы 2 § 3 гл. 3.

Докажем теперь соотношение (5.1). Пусть $\bar{\xi}_n(t) = \bar{\xi}_k^{(n)}(t)$ при $\sup_{s \in [t_0, t]} |\bar{\xi}^{(n)}(s)| \leq R$ и $\bar{\xi}_n(t) = \bar{\xi}_7(t_1)$ при $t_1 < t$, если $\sup_{s \in [t_0, t]} |\bar{\xi}^{(n)}(s)| > R$. Тогда из леммы 3 вытекает, что

$$\mathbf{P} \{ |\bar{\xi}_n(t_k^{(n)}) - \bar{\xi}_n(t_i^{(n)})| > \varepsilon / \bar{\xi}_n(t_i^{(n)}) \} \leq H_\varepsilon (R^2 + 1) (t_k^{(n)} - t_i^{(n)}). \quad (5.4)$$

Кроме того, для любого множества функций \mathbf{A} из $F(D_m[t_0, T])$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{P} \{ \bar{\xi}_n(t) \in \mathbf{A} \} - \mathbf{P} \{ \bar{\xi}^{(n)}(t) \in \mathbf{A} \}| \leq \mathbf{P} \{ \sup_t |\bar{\xi}^{(n)}(t)| > R \}.$$

Если $H_\varepsilon (R^2 + 1) (c + \max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})) < 1$, то на основании леммы 1 заключаем, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 < t < t_0 + c} |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(t_0)| > 2\varepsilon \right\} \leq \frac{(R^2 + 1) H_\varepsilon c}{1 - (R^2 + 1) H_\varepsilon c},$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{T-c < t < T} |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(T)| > 4\varepsilon \right\} \leq \\ & \frac{(R^2 + 1) H_\varepsilon (c + \max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}))}{1 - H_\varepsilon (c + \max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}))(R^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Точно так же, используя лемму 2, получаем, что при

$$(R^2 + 1) H_\varepsilon (2c + \max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})) < 1$$

имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t-2c < t' < t'' < t''' < t} \min [|\bar{\xi}_n(t') - \bar{\xi}_n(t'')|, |\bar{\xi}_n(t'') - \bar{\xi}_n(t''')|] > 4\varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \frac{H_\varepsilon^2 (R^2 + 1)^2 (2c + \max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}))^2}{[1 - H_\varepsilon (R^2 + 1) (2c + \max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}))]^2}. \end{aligned}$$

Выберем n настолько большим, чтобы $\max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) < C$.

Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t_0 < t' < t < t'' < T \\ |t' - t| < C}} \min [|\bar{\xi}_n(t') - \bar{\xi}_n(t)|; |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(t'')|] > 4\varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \sum_{0 < k < \frac{T-t_0}{C}} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 + kC < t' < t < t'' < t_0 + (k+2)C} \min [|\bar{\xi}_n(t') - \bar{\xi}_n(t)|; |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(t'')|] > 4\varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \frac{T-t_0}{C} \frac{9C^2 (R^2 + 1)^2 H_\varepsilon^2}{(1 - 3C (R^2 + 1) H_\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\max_i (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) < C$ и $3C (R^2 + 1) H_\varepsilon < 1$ будем иметь:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \Delta_C(\bar{\xi}_n(t)) > \varepsilon \} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t_0 < t < t_0 + c} |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(t_0)| > \frac{2\varepsilon}{10} \right\} + \\ & + \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t_0 < t' < t < t'' < T \\ |t' - t| < C}} \min [|\bar{\xi}_n(t') - \bar{\xi}_n(t)|; |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(t'')|] > \frac{4\varepsilon}{10} \right\} + \\ & + \mathbf{P} \left\{ \sup_{T-c < t < T} |\bar{\xi}_n(t) - \bar{\xi}_n(T)| > \frac{4\varepsilon}{10} \right\} \leq \end{aligned}$$

(5,5)

$$\leq \frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{1 - \frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{10}} + \frac{4H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{1 - 2\frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{10}} + \frac{9 \left(\frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1)}{10} \right)^2 (T - t_0) C}{\left(1 - 3\frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{10} \right)^2}.$$

Но так как

$$\mathbf{P} \{ \Delta_C (\bar{\xi}^{(n)}(t)) > \varepsilon \} \leq \mathbf{P} \{ \Delta_C (\bar{\bar{\xi}}_n(t)) > \varepsilon \} + \mathbf{P} \{ \sup_t |\bar{\xi}^{(n)}(t)| > R \},$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \Delta_C (\bar{\xi}^{(n)}(t)) > \varepsilon \} &\leq (R^2 + 1) H_{\varepsilon} C \frac{5 + 9(R^2 + 1) \frac{H_{\varepsilon} (T - t_0)}{10}}{(1 - 3\frac{H_{\varepsilon} (R^2 + 1) C}{10})^2} + \\ &+ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \sup_t |\bar{\xi}^{(n)}(t)| > R \}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $C \rightarrow 0$, а затем при $R \rightarrow \infty$ и используя лемму 4, получим формулу (5.1). Теорема доказана.

Глава 7. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Предварительные замечания

В этой главе будет изучаться специальный вид сходимости дискретной последовательности к непрерывному процессу.

Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}$ — последовательность независимых в каждой серии случайных величин, а $S_{nk} = \sum_{i=1}^k \xi_{ni}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $S_{n0} = 0$. Рассмотрим случайные величины, удовлетворяющие условиям: $M\xi_{ni} = 0$, $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$, и исследуем случай сходимости S_{nk} к процессу броуновского движения. Положим $\xi_n(t) = S_{nk}$, если $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$ и $t \in [0, 1]$. При некоторых условиях (например, если $\sup_k M|\xi_{kn}|^3 = o\left(\frac{1}{n}\right)$) конечномерные распределения $\xi_n(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса броуновского движения. Так как S_{nk} образуют цепь Маркова, то из теоремы § 5 гл. 6 вытекает, что для всякого функционала $F(x(t))$ из $F(J, \mu_0)$, где μ_0 — мера, соответствующая процессу броуновского движения на $D_n[t_0, T]$, распределение $F(\xi_n(t))$ будет сходиться к распределению $F(w(t))$.

Эта глава посвящена уточнению предельной теоремы для некоторых конкретных классов функционалов. Уточнения эти будут заключаться в нахождении первого члена асимптотического разложения математического ожидания некоторых гладких функционалов от $\xi_n(t)$ и в оценке скорости сходимости распределений некоторых функционалов к предельному распределению.

Такие исследования для различных частных случаев проводились и ранее. Однако предлагаемый метод решения этих задач существенно отличается от методов, применявшихся для

подобных целей. Обычный метод основывается на некотором аналитическом аппарате (характеристические функции, разностные и дифференциальные уравнения и т. д.), с помощью которого получаются в явной или неявной форме распределения соответствующих функционалов, которые затем подвергаются асимптотическому анализу.

Прямые вероятностные методы, используемые в этой главе, основываются на построении величин, распределение которых совпадает с распределением соответствующего функционала. Для решения задачи исследуется асимптотическое поведение самих величин при $n \rightarrow \infty$. Такие методы дают результаты лишь в том случае, если удачно построена величина, распределение которой совпадает с распределением функционала. Для построения таких случайных величин используется представление последовательности сумм независимых случайных величин с помощью значений процесса броуновского движения. Возможность такого представления изучается в § 2. В § 3 получена оценка скорости сходимости вероятности

$$P\{g_1(t) < \xi_n(t) < g_2(t), t \in [0, 1]\}$$

к вероятности

$$P\{g_1(t) < w(t) < g_2(t), t \in [0, 1]\},$$

где $w(t)$ — процесс броуновского движения, а $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — некоторые непрерывные функции. В § 4 рассматриваются функционалы интегрального вида

$$\int_0^1 f(s, \xi_n(s)) ds \text{ и изучается сходимость таких функционалов к } \int_0^1 f(s, w(s)) ds.$$

мость таких функционалов к

§ 2. Представление последовательности сумм независимых случайных величин значениями процесса броуновского движения

Основной результат, который будет получен в этом параграфе, можно сформулировать следующей теоремой.

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, для которых $M\xi_i = 0$, $D\xi_i < \infty$, а $w(t)$ — процесс броуновского движения. Тогда существуют такие неотрицательные независимые случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, для которых величины

$$w(\tau_1), w(\tau_1 + \tau_2) - w(\tau_1), \dots, w(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) - w(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1})$$

имеют такое же совместное распределение, как и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

При этом

а) $M\tau_k = D\xi_k$,

б) существуют такие L_m , что

$$M(\tau_k)^m \leq L_m M(\xi_k)^{2m},$$

в) если $|\xi_i| \leq h$, то $|\omega(s) - \omega(\sum_1^k \tau_i)| \leq h$ при $s \in [\sum_1^k \tau_i, \sum_1^{k+1} \tau_i]$.

Эта теорема позволяет вместо последовательности сумм $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$ рассматривать последовательность значений процесса $\omega(\sum_1^k \tau_i)$, так как совместные распределения членов обеих последовательностей совпадают. Для доказательства теоремы установим несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть $\omega(t)$ — процесс броуновского движения, определённый при $t \geq 0$, $\omega(0) = 0$, а τ — минимальный корень уравнения $(\omega(t) - a)(\omega(t) - b) = 0$, где $a < 0 < b$. Положим

$$\varphi_1(t) = P\{\omega(\tau) = a, \tau < t\}, \quad \varphi_2(t) = P\{\omega(\tau) = b, \tau < t\}.$$

Тогда при $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_1(t) = \frac{\text{sh}(b\sqrt{2\lambda})}{\text{sh}((b-a)\sqrt{2\lambda})}, \quad (2.1)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_2(t) = -\frac{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})}{\text{sh}((b-a)\sqrt{2\lambda})}, \quad (2.2)$$

где $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Доказательство. Пусть $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \dots$ — цепь Маркова, причём $\xi_k^{(n)}$ принимают только значения вида $a + l \frac{b-a}{\sqrt{n}}$, где l — целые числа, и

$$P\{\xi_{k+1}^{(n)} = a + (l \pm 1) \frac{b-a}{\sqrt{n}} | \xi_k^{(n)} = a + l \frac{b-a}{\sqrt{n}}\} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $\xi^{(n)}(t) = \xi_k^{(n)}$ при $t \in \left[\frac{k}{n} (b-a)^2, \frac{k+1}{n} (b-a)^2 \right]$. Тогда выполняются условия теоремы § 5 гл. 6, если только δ_n таково, что $\frac{\sqrt{n}}{\delta_n} \rightarrow \infty$, $f(t, x, u) = 0$, $a(t, x) = 0$, $b(t, x) = 1$. Поэтому, если $\xi_n^{(1)} \rightarrow w(0)$ по вероятности, $F(x(t)) \in F(J, \mu_0)$, μ_0 — мера, соответствующая процессу $w(t)$ на $D_1[0, T]$, то распределение $F(\xi_n(t))$ будет сходиться к распределению $F(w(t))$. Пусть $F_T^{(1)}(x(t)) = t$, если при некотором $t \leq T$ $x(t)$ впервые пересекает прямую $x = a$, и не пересекает при $s < t$ прямую $x = b$. Во всех остальных случаях $F_T^{(1)}(x(t)) = 0$. Легко убедиться, что $F_T^{(1)}(x(t)) \in F(J, \mu_0)$; поэтому

$$Me^{-\lambda F_T^{(1)}(\xi_n(t))} \rightarrow Me^{-\lambda F_T^{(1)}(w(t))}.$$

Так как последовательность $F_T^{(1)}(\xi_n(t))$ равномерно относительно T ограничена по вероятности, эта сходимость равномерна относительно T . Пусть τ_n первый нуль уравнения $(\xi_n(t) - a)(\xi_n(t) - b) = 0$, а $\varepsilon(x) = 1$ при $x = 0$, $\varepsilon(x) = 0$ при $x \neq 0$. Тогда $F_T^{(1)}(\xi_n(t)) \rightarrow \tau_n \varepsilon(\xi_n(\tau_n) - a)$ при $T \rightarrow \infty$, а $F_T^{(1)}(w(t)) \rightarrow \tau \varepsilon(w(\tau) - a)$ при $T \rightarrow \infty$; поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Me^{-\lambda \tau_n \varepsilon(\xi_n(\tau_n) - a)} = Me^{-\lambda \tau \varepsilon(w(\tau) - a)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\varphi_1(t).$$

Пусть

$$g_n^{(k)}(l) = P \left\{ \tau_n \varepsilon(\xi_n(\tau_n) - a) = \frac{k}{n} (b-a)^2 / \xi_0 = a + l \frac{b-a}{[\sqrt{n}]} \right\}.$$

Тогда при $0 < l < [\sqrt{n}]$

$$g_n^{(k)}(l) = \frac{1}{2} [g_n^{(k-1)}(l-1) + g_n^{(k-1)}(l+1)],$$

а $g_n^{(k)}([\sqrt{n}]) = 0$, $g_n^{(k)}(0) = 0$ при $k > 0$, $g_n^{(0)}(l) = 0$ при $l \neq 0$, $g_n^{(0)}(0) = 1$. Положим

$$G_n(l) = \sum_{k=0}^{\infty} g_n^{(k)}(l) e^{-\lambda \frac{k}{n} (b-a)^2}.$$

Тогда

$$G_n(l) = \frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{1}{n} (b-a)^2} [G_n(l-1) + G_n(l+1)], 0 < l < [\sqrt{n}], \quad (2.3)$$

$$G_n(0) = 1, \quad G_n([\sqrt{n}]) = 0. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.3) находим, что

$$G_n(l) = C_1 \left[e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} + \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right]^l + C_2 \left[e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} - \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right],$$

а C_1 и C_2 определяются из соотношений (2.4):

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} + \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^{[V\bar{n}]} - \left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} - \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^{[V\bar{n}]}}.$$

Таким образом,

$$G_n(l) = \frac{\left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} + \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^l - \left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} - \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^l}{\left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} + \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^{[V\bar{n}]} - \left\{ e^{\frac{\lambda}{n}(b-a)^2} - \sqrt{e^{\frac{2\lambda}{n}(b-a)^2} - 1} \right\}^{[V\bar{n}]}}. \quad (2.5)$$

Очевидно, что

$$G_n(l) = M \left(e^{-\lambda \tau_n (\xi_n(\tau_n) - a)} / \xi_n(0) = a + \frac{l}{[V\bar{n}]} (b-a) \right).$$

Выбирая $l = \left[\frac{b}{b-a} [V\bar{n}] \right]$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим из (2.5) формулу (2.1). Аналогично выводится и формула (2.2). Лемма доказана.

Следствия. Если τ величина, определённая в лемме 1, то

1)

$$M e^{-\lambda \tau} = \frac{\operatorname{sh} b \sqrt{2\lambda} - \operatorname{sha} \sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} (b-a) \sqrt{2\lambda}}, \quad (2.6)$$

2) учитывая, что

$$P \{w(\tau) = a\} = \int_0^{\infty} d\varphi_1(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\varphi_1(t),$$

получаем

$$P \{w(\tau) = a\} = \frac{b}{b-a}, \quad P \{w(\tau) = b\} = \frac{-a}{b-a},$$

3) так как $M\tau = -\frac{d}{d\lambda} M e^{-\lambda \tau} \big|_{\lambda=0}$, то $M\tau = -ab$,

4)

$$M\tau w(\tau) = a \int_0^{\infty} t d\varphi_1(t) + b \int_0^{\infty} t d\varphi_2(t) = -\frac{d}{d\lambda} \frac{a \operatorname{sh} b \sqrt{2\lambda} - b \operatorname{sha} \sqrt{2\lambda}}{\operatorname{sh} (b-a) \sqrt{2\lambda}} \bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{3} ab(a+b) = -\frac{1}{3} M(w(\tau))^3,$$

5) используя формулу (2.6) и соотношение

$$(-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} M e^{-\lambda t} \Big|_{\lambda=0} = M \tau^k,$$

находим, что для всякого k существует такое C_k , что $M \tau_k \leq C_k ab(b-a)^{2k-2}$.

Лемма 2. Если $w(t)$ — процесс броуновского движения, $w(0)=0$, а τ определено так, как в лемме 1, то процесс $w_1(t) = w(t+\tau) - w(\tau)$ будет также процессом броуновского движения, причём для всех k и $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ случайные величины $w_1(t_1), w_1(t_2), \dots, w_1(t_k)$ не зависят от пары случайных величин τ и $w(\tau)$.

Доказательство. Пусть τ_n — минимальное число вида $\frac{k}{n}$, для которого

$$\left(w\left(\frac{k}{n}\right) - a\right)\left(w\left(\frac{k}{n}\right) - b\right) \geq 0.$$

Тогда $\tau_n \rightarrow \tau$, $w(\tau_n) \rightarrow w(\tau)$ с вероятностью 1 и, следовательно, $w_1^{(n)}(t) = w(\tau_n + t) - w(\tau_n)$ при каждом t с вероятностью 1 сходится к $w_1(t) = w(\tau + t) - w(\tau)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что процесс $w_1^{(n)}(t)$ является процессом броуновского движения и $w_1^{(n)}(t_1), \dots, w_1^{(n)}(t_k)$ не зависят от пары случайных величин $w_1^{(n)}(\tau_n), \tau_n$. Но для любых x_1, x_2, \dots, x_k , интервала Δ и натурального l справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} & P \left\{ w_1^{(n)}(t_1) < x_1, \dots, w_1^{(n)}(t_k) < x_k, w(\tau_n) \in \Delta, \tau_n = \frac{l}{n} \right\} = \\ & = P \left\{ w\left(t_1 + \frac{l}{n}\right) - w\left(\frac{l}{n}\right) < x_1, \dots, w\left(t_k + \frac{l}{n}\right) - w\left(\frac{l}{n}\right) < x_k, \right. \\ & \quad \left. w\left(\frac{l}{n}\right) \in \Delta \right\}; \\ & \left(w\left(\frac{1}{n}\right) - a\right)\left(w\left(\frac{1}{n}\right) - b\right) < 0, \dots, \left(w\left(\frac{l-1}{n}\right) - a\right)\left(w\left(\frac{l-1}{n}\right) - b\right) < \\ & < 0, \left(w\left(\frac{l}{n}\right) - a\right)\left(w\left(\frac{l}{n}\right) - b\right) \geq 0 \right\} = P \left\{ w\left(t_1 + \frac{l}{n}\right) - w(t_1) < \right. \\ & < x_1, \dots, w\left(t_k + \frac{l}{n}\right) - w\left(\frac{l}{n}\right) < x_k \right\} \times P \left\{ w\left(\frac{l}{n}\right) \in \Delta, a < w\left(\frac{l}{n}\right) < \right. \\ & < b, j = 1, 2, \dots, l-1, \left(w\left(\frac{j}{n}\right) - a\right)\left(w\left(\frac{j}{n}\right) - b\right) \geq 0 \right\} = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{P} \{ \omega(t_1) < x_1, \dots, \omega(t_k) < x_k \} \mathbf{P} \left\{ \omega(\tau_n) \in \Delta, \tau_n = \frac{l}{n} \right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть величина ξ не зависит от $\omega(t)$ и имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, $M\xi = 0$ и $G(x) > 0$ при $x < 0$ таково, что $\int_x y dF(y) = 0$, а при $x > 0$, $G(x) < 0$, $\int_{G(x)}^x y dF(y) = 0$. Тогда, если τ — минимальный корень уравнения $(\omega(t) - \xi)(\omega(t) - G(\xi)) = 0$, то величина $\omega(\tau)$ имеет такое же распределение, как ξ .

Доказательство. Существование функции $G(x)$ вытекает из непрерывности $F(y)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} y dF(y) = 0$. Очевидно, что $G(0) = 0$ и $G(x)$ не возрастает, причём $G(x)$ можно определить таким образом, чтобы $G(G(x)) = x$. На основании следствия 2 из леммы 1 можем записать, что

$$\mathbf{P} \{ \omega(\tau) = \xi / \xi \} = \frac{|G(\xi)|}{|\xi| + |G(\xi)|}, \quad \mathbf{P} \{ \omega(\tau) G(\xi) / \xi \} = \frac{|\xi|}{|\xi| + |G(\xi)|}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ 0 < \omega(\tau) < x \} &= \int_0^x \frac{-G(y)}{y - G(y)} dF(y) + \int_{G(x)}^0 \frac{-y}{-y + G(y)} dF(y) = \\ &= \int_0^x \frac{-G(y)}{y - G(y)} dF(y) - \int_0^x \frac{-G(z)}{z - G(z)} dF(G(z)) \end{aligned}$$

(во втором интеграле была сделана замена $y = G(z)$ и использовано соотношение $G(G(z)) = z$). Заметим теперь, что из соотношения $\int_{G(x)}^x y dF(y) = 0$ вытекает, что $z dF(z) = G(z) dF(G(z))$.

Следовательно,

$$\mathbf{P} \{ 0 < \omega(\tau) < x \} = \int_0^x \frac{-G(y)}{y - G(y)} dF(y) + \int_0^x \frac{z dF(z)}{z - G(z)} = \int_0^x dF(y).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{P} \{ x < \omega(\tau) < 0 \} = \int_x^0 dF(y).$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Из следствия 3 леммы 1 вытекает, что $M(\tau | \xi) = |\xi| |G(\xi)|$. Поэтому

$$\begin{aligned} M\tau &= M|\xi| |G(\xi)| = - \int_{-\infty}^{\infty} xG(x) dF(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} (G(x))^2 dF(G(x)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = D\xi \end{aligned}$$

(при этом вновь было использовано равенство $xdF(x) = G(x)dF(G(x))$).

Замечание 2.

$$\begin{aligned} M\tau^k &\leq C_k M |G(\xi)| \cdot |\xi| (|G(\xi)| + |\xi|)^{2k-2} \leq \\ &\leq C_k 2^{2k-1} M \left(|G(\xi)| \cdot |\xi| \frac{|G(\xi)|^{2k-1} + |\xi|^{2k-1}}{|\xi| + |G(\xi)|} \right) = \\ &= C_k 2^{2k-1} M |\omega(\tau)|^{2k} = 2^{2k-1} C_k M |\xi|^{2k}. \end{aligned}$$

Замечание 3. Очевидно, если $|\xi| \leq C$, то $|G(\xi)| \leq C$, и значит $|\omega(\tau)| \leq C$ и $\sup_{s \leq \tau} |\omega(s)| \leq C$.

Приступим теперь к доказательству теоремы для того случая, когда величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют непрерывные распределения. Пусть процесс $\omega(t)$ не зависит от величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ — функция распределения этих величин, а $G_k(x)$ удовлетворяют для $F_i(x)$ условиям леммы 3. Обозначим через τ_1 первый нуль уравнения $(\omega(t) - \xi_1)(\omega(t) - G_1(\xi_1)) = 0$. Положим далее $\omega_1(t) = \omega(t + \tau_1) - \omega(\tau_1)$. $\omega_1(t)$ не зависит от пары $\omega(\tau_1), \tau_1$. Пусть τ_2 — первый нуль уравнения $(\omega_1(t) - \xi_2)(\omega_1(t) - G_2(\xi_2)) = 0$; тогда $\omega_1(\tau_2)$ и τ_2 не зависят от $\omega_1(\tau_1)$ и τ_1 . Обозначим $\omega_2(t) = \omega_1(t + \tau_2) - \omega_1(\tau_2)$. Этот процесс не будет зависеть ни от $\omega_1(\tau_2)$ и τ_2 ни от $\omega(\tau_1)$ и τ_1 . Пусть τ_3 — первый нуль уравнения $(\omega_2(t) - \xi_3)(\omega_2(t) - G_3(\xi_3)) = 0$. Тогда пары величин $\omega(\tau_1), \tau_1; \omega_1(\tau_2), \tau_2; \omega_2(\tau_3), \tau_3$ независимы между собой. При этом величины $\omega(\tau_1), \omega_1(\tau_2), \omega_2(\tau_3)$ распределены так же, как величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Продолжая этот процесс, построим процессы $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_{n-1}(t)$ и величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ таким образом, что $\omega_k(t) = \omega_{k-1}(\tau_k + t) - \omega_{k-1}(\tau_k)$, при этом $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ будут независимы, а $\omega(\tau_1), \omega_1(\tau_2), \dots, \omega_{n-1}(\tau_n)$ будут иметь такое же совместное распределение, как $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Из определения процессов вытекает, что

$$\omega_k(\tau_{k+1}) = \omega\left(\sum_1^{k+1} \tau_i\right) - \omega\left(\sum_1^k \tau_i\right).$$

Чтобы убедиться в том, что утверждения а) — в) выполняются, достаточно воспользоваться замечаниями к лемме 3. Теорема доказана для случая, когда ξ_k имеют непрерывные распределения. Доказательство для общего случая можно получить предельным переходом от величин с непрерывными распределениями.

§ 3. О вероятности нахождения последовательных сумм между двумя границами

Пусть величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ независимы, одинаково распределены; $M\xi_i^{(n)} = 0$, $D\xi_i^{(n)} = \frac{1}{n}$ и существует такое C , что

$P\left\{|\xi_i^{(n)}| \leq C \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = 1$. Положим $S_{nk} = \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)}$. Пусть функции

$g_1(t)$ и $g_2(t)$ определены при $t \geq 0$ и удовлетворяют условиям:

- 1) $g_1(0) < 0 < g_2(0)$,
- 2) существует такое K , что

$$|g_1(t+h) - g_1(t)| \leq Kh, \quad |g_2(t+h) - g_2(t)| \leq Kh.$$

Обозначим через Q_n вероятность

$$Q_n = P\left\{g_1\left(\frac{k}{n}\right) < S_{nk} < g_2\left(\frac{k}{n}\right), k = 1, 2, \dots, n\right\}, \quad (3.1)$$

а через Q вероятность

$$Q = P\{g_1(t) < w(t) < g_2(t), t \in [0, 1]\}, \quad (3.2)$$

где $w(t)$ — процесс броуновского движения. Тогда справедлива теорема.

Теорема. Существует постоянная L , зависящая лишь от K , C , $g_1(0)$ и $g_2(0)$ такая, что

$$|Q_n - Q| \leq L \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \quad (3.3)$$

Для доказательства теоремы нужны некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ такие независимые случайные величины, для которых $M\eta_i = 0$, $D\eta_i = \frac{1}{n}$, $M\eta_i^4 \leq \frac{H}{n^2}$. Тогда

$$P\left\{\sup_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{i=1}^k \eta_i\right| > 2 \ln n\right\} \leq \frac{1}{n} (H + 2 \exp(\sqrt{H} + \frac{e}{2})).$$

Доказательство. Положим $\eta'_k = \eta_k$, если $|\eta_k| \leq 1$, $\eta'_k = 0$ и $|\eta_k| > 1$, $\eta''_k = \eta_k - \eta'_k$. Тогда

$$\begin{aligned}
& P \left\{ \sup_k \left| \sum_{i=1}^k \eta_i \right| > 2 \ln n \right\} \leq P \left\{ \sup_k \left| \sum_{i=1}^k \eta'_i \right| > 2 \ln n \right\} + \\
& + P \left\{ \sup_k |\eta_k| > 0 \right\} \leq \sum_{k=1}^n P \left\{ \left| \sum_{i=1}^k \eta'_i \right| > 2 \ln n \right\} + \sum_{k=1}^n P \{ |\eta_k| > 1 \} \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^n P \left\{ \sum_{i=1}^k \eta'_{i,k} > 2 \ln n \right\} + \sum_{k=1}^n P \left\{ - \sum_{i=1}^k \eta'_{i,k} > 2 \ln n \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n M |\eta_k|^4 \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{M e^{\sum_{i=1}^k \eta'_{i,k}}}{n^2} + \frac{M e^{-\sum_{i=1}^k \eta'_{i,k}}}{n^2} \right) + \frac{H}{n}
\end{aligned}$$

(при выводе использовалось неравенство Чебышева). Затем

$$M e^{\sum_{i=1}^k \eta'_i} = \prod_{i=1}^k M e^{\eta'_i} = \prod_{i=1}^k M \left(1 + \eta'_i + \frac{1}{2} (\eta'_i)^2 e^{\Theta_i \eta'_i} \right),$$

где $0 < \Theta_i < 1$. Учитывая, что $|\eta'_i| \leq 1$, получаем

$$M e^{\sum_{i=1}^k \eta'_i} \leq \prod_{i=1}^k \left(1 + |M \eta'_i| + \frac{1}{2} e M \eta_i^2 \right).$$

Но

$$\begin{aligned}
|M \eta'_i| &= |M \eta_i| \leq M |\eta_i| \leq \sqrt{M |\eta_i|^2 \cdot P \{ |\eta_i| > 0 \}} \leq \\
&\leq \sqrt{M |\eta_i|^2 M |\eta_i|^4} \leq \frac{1}{n} \sqrt{H}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
M e^{\sum_{i=1}^k \eta'_i} &\leq \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{\sqrt{H}}{n} + \frac{e}{2n} \right) \leq \exp \left\{ \frac{k}{n} \left(\sqrt{H} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e}{2} \right) \right\} \leq \exp \left\{ \sqrt{H} + \frac{e}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$M e^{-\sum_{i=1}^k \eta'_i} \leq \exp \left(\sqrt{H} + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом,

$$P \left\{ \sup_k \left| \sum_{i=1}^k \eta_i \right| > 2 \ln n \right\} \leq \frac{1}{n} \left(H + 2 \exp \left(\sqrt{H} + \frac{e}{2} \right) \right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. При $h > 0$ и $k > 0$

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} (w(t) - kt) < h \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}T} \int_{-h}^h \exp \left\{ -\frac{(z + kT)^2}{2T} \right\} dz + \frac{1 - e^{-2kh}}{\sqrt{2\pi}T} \int_{-\infty}^{-h} \exp \left\{ -\frac{(z + kT)^2}{2T} \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Заметим, что условные распределения $w(t) - kt$ при условии $w(T) - kT = z$ не зависят от k . Действительно, распределения процесса $w(t) - kt - \frac{t}{T}[w(T) - kT] = w(t) - \frac{t}{T}w(T)$ не зависят от параметра k и процесс $w(t) - \frac{t}{T}w(T)$ не зависит от величины $w(T)$. Чтобы убедиться в последнем, учитывая, что $w(t) - \frac{t}{T}w(T)$ и $w(T)$ имеют совместные гауссовские распределения, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} M \left(w(t) - \frac{t}{T} w(T) \right) w(T) &= Mw(t)w(T) - \frac{t}{T} Mw(T)^2 = \\ &= Mw(t)^2 + Mw(t)[w(T) - w(t)] - t = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, распределения $w(t) - kt$ при условии $w(T) - kT = z$ совпадают с распределениями $w(t)$ при условии $w(T) = z$. Поэтому

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} (w(t) - kt) < h \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^h P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} (w(t) - kt) < h/w(T) = z + \right. \\ &+ \left. kt \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}T} e^{-\frac{(z+kT)^2}{2T}} dz = \int_{-\infty}^h P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} w(t) < h/w(T) = \right. \\ &= \left. z \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}T} e^{-\frac{(z+kT)^2}{2T}} dz. \end{aligned}$$

Для нахождения

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) < h/w(T) = z\}$$

найдем совместное распределение величин $\sup_{0 \leq t \leq T} w(t)$ и $w(T)$. Если $z < h$, то

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) < h, w(T) < z\} &= P\{w(T) < z\} - \\ &- P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) \geq h, w(T) < z\}. \end{aligned}$$

Пусть τ момент первого достижения процессом $w(t)$ точки h . Тогда

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) \geq h, w(T) < z\} &= P\{\tau < T, w(T) < z\} = \\ &= P\{\tau < T, w(T) - w(\tau) + w(\tau) < z\} = \\ &= P\{\tau < T, w(T) - w(\tau) < z - h\} = P\{\tau < T, w(T) - w(\tau) > h - z\}, \end{aligned}$$

так как $w(T) - w(\tau)$ при фиксированном τ имеет симметричное распределение. Учитывая, что $w(\tau) = h$, получим

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) \geq h, w(T) < z\} &= P\{\tau < T, w(T) > 2h - z\} = \\ &= P\{w(T) > 2h - z\}, \end{aligned}$$

поскольку событие $\{w(T) > 2h - z\}$ влечёт событие $\{\tau < T\}$. Значит,

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) < h; w(T) < z\} = P\{w(T) < z\} - P\{w(T) > 2h - z\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq T} w(t) < h/w(T) = z\} &= \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial z} (P\{w(T) < z\} - P\{w(T) > 2h - z\})}{\frac{\partial}{\partial z} P\{w(T) < z\}} = \\ &= 1 - e^{-\frac{(2h-z)^2}{2T}} \cdot e^{\frac{z^2}{2T}} = 1 - e^{-\frac{2h(h-z)}{T}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} (w(t) - kt) < h\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{(z+kt)^2}{T}} \left(1 - e^{-\frac{2h(h-z)}{T}}\right) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{(z+kt)^2}{2T}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{(z+kt-2h)^2}{2T} - 2kh} dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{(z+kt)^2}{2T}} dz - \frac{e^{-2kh}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{(z+kt)^2}{2T}} dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{(z+kt)^2}{2T}} dz - \frac{1-e^{-2kh}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{(z+kt)^2}{2T}} dz.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. При $k \geq 0$, $h \geq 0$

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} (w(t) - kt) < h\} \leq \frac{2h}{\sqrt{2\pi T}} + 2kh.$$

Лемма 3. Пусть $\psi(x)$ — характеристическая функция интервала $(0, 1)$, а τ — момент первого достижения процессом $w(t)$ точки a . Тогда

$$M\left(\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau}}\right)^{3/2} \leq \frac{4}{a^2\sqrt{2\pi}}.$$

Доказательство. Ввиду симметрии процесса $w(t)$ достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Используя лемму 2, при $k = 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
P\{\tau > s\} &= P\left\{\sup_{0 \leq t \leq s} w(t) < a\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(a/\sqrt{s})} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Поэтому плотность распределения величины τ будет составлять:

$$p_\tau(s) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{2s}};$$

следовательно,

$$p_\tau(s) \leq \frac{1}{a^2\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому

$$M\left(\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau}}\right)^{3/2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right)^{3/2} p_\tau(s) ds \leq \frac{1}{a^2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-s)^{-3/4} ds = \frac{4}{a^2\sqrt{2\pi}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $g(t)$ определена при $t \in [0, 1]$ и удовлетворяет условиям:

1) $g(0) > 0$,

2) существует такое K , что $|g(t_2) - g(t_1)| < K(t_2 - t_1)$. Тогда

$$P\{0 < \sup_{0 \leq t \leq 1} (w(t) - g(t)) < h\} \leq 2h \left[\frac{e^{K^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{4}{g(0)^2 \sqrt{2\pi}} \right]^{2/3} + K \right].$$

Доказательство. Пусть τ' — первый нуль разности $w(t) - g(t)$. Тогда, если $\psi^{(\nu)}$ характеристическая функция $(0, 1)$, то

$$\begin{aligned} P\{0 < \sup_{0 \leq t \leq 1} [w(t) - g(t)] < h\} &= MP\left\{\sup_{\tau' < t \leq 1} [w(t) - g(t)] < \right. \\ &< h/\tau'\} \psi(\tau') = MP\left\{\sup_{\tau' < t \leq 1} [w(t) - w(\tau') - (g(t) - g(\tau'))] < \right. \\ &< h/\tau'\} \psi(\tau') \leq MP\left\{\sup_{\tau' < t \leq 1} |w(t) - w(\tau') - k(t - \tau')| < h/\tau'\right\} \psi(\tau'). \end{aligned}$$

Но процесс $w(t) - w(\tau')$ при фиксированном τ' имеет такие же распределения, как и процесс броуновского движения (это можно установить точно так, как лемму 2 § 2). На основании следствия из леммы 2 можно утверждать, что

$$P\left\{\sup_{\tau' < t \leq 1} [w(t) - w(\tau') - k(t - \tau')] < h/\tau'\right\} \leq \frac{2h}{\sqrt{2\pi}(1 - \tau')} + 2Kh.$$

Таким образом,

$$P\{0 < \sup_{0 \leq t \leq 1} (w(t) - g(t)) < h\} \leq \frac{2h}{\sqrt{2\pi}} M \frac{\psi(\tau')}{\sqrt{1 - \tau'}} + 2Kh.$$

Заметим теперь, что мера μ_1 , соответствующая процессу $w(t) - (g(t) - g(0))$, абсолютно непрерывна относительно меры μ , соответствующей процессу $w(t)$ (это вытекает из теоремы 3 § 1 гл. 5), причём

$$\frac{d\mu_1}{d\mu}(w(t)) = \exp\left\{-\int_0^1 g(t) dw(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 g'(t)^2 dt\right\}.$$

Для любого функционала $F(x(t))$ поэтому справедливо соотношение

$$MF(w(t) - g(t) + g(0)) = MF(w(t)) \frac{d\mu_1}{d\mu}(w(t));$$

следовательно,

$$M \frac{\psi(\tau'_k)}{\sqrt{1 - \tau'}} = M \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1 - \tau}} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \int_0^1 g'(t) d\omega(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 g'(t)^2 dt \right\},$$

где τ — первый нуль $\omega(t) = g(0)$. Используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} M \frac{\psi(\tau')}{\sqrt{1-\tau'}} &\leq \left[M \left(\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau}} \right)^{3/2} \right]^{2/3} \times \\ &\times \left[M \exp \left\{ -3 \int_0^1 g'(t) d\omega(t) - \frac{3}{2} \int_0^1 g'(t)^2 dt \right\} \right]^{1/3} \leq \\ &\leq \left[\frac{4}{g(0)^2 \sqrt{2\pi}} \right]^{2/3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 g'(t)^2 dt \right\} \times \\ &\times \left[M \exp \left\{ -3 \int_0^1 g'(t) d\omega(t) \right\} \right]^{1/3}. \end{aligned}$$

Величина $3 \int_0^1 g'(t) d\omega(t)$ имеет гауссовское распределение

со средним нуль и дисперсией $9 \int_0^1 g'(t)^2 dt$; поэтому

$$M \exp \left\{ -3 \int_0^1 g'(t) d\omega(t) \right\} = \exp \left\{ \frac{9}{2} \int_0^1 g'(t)^2 dt \right\}.$$

Так как $g'(t)^2 \leq K^2$, то

$$M \frac{\psi(\tau')}{\sqrt{1-\tau'}} \leq \left[\frac{4}{g(0)^2 \sqrt{2\pi}} \right]^{2/3} e^{K^2}.$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Из теоремы § 2 вытекает, что можно построить такие величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, что $\omega(\tau_1), \omega(\tau_1 + \tau_2), \dots, \omega(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)$ будут иметь такие же распределения, как и $s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nn}$, причём $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ будут независимы и одинаково распределены, $M\tau_i = D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$,

$M\tau_i^m < L_m M\xi_{ni}^{2m} \leq L_m \frac{c^{2m}}{n^m}$, так как по условию $|\xi_{ni}| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

Кроме того, при

$$s \in \left(\sum_{i=1}^k \tau_i, \sum_{i=1}^{k+1} \tau_i \right)$$

$$\left| w(s) - w\left(\sum_{i=1}^k \tau_i\right) \right| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}. \quad (3.5)$$

Обозначим $D\tau_i = \frac{b^2}{n^2}$, $\eta_i^{(n)} = \frac{\sqrt{n}}{b} \left(\tau_i - \frac{1}{n} \right)$, $\zeta_{nk} = \sum_{i=1}^k \eta_i^{(n)}$. Тогда $w(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k) = w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)$. Таким образом,

$$Q_n = \mathbf{P} \left\{ g_1\left(\frac{k}{n}\right) < w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right) < g_2\left(\frac{k}{n}\right), k=1, 2, \dots, n \right\}.$$

Из (3.5) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ g_1\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{c}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{c}{\sqrt{n}}, s \in \left(\frac{k}{n} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, \frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}\right), k=0, 1, \dots, n-1 \right\} \leq \\ & \leq Q_n \leq \mathbf{P} \left\{ g_1\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{c}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2\left(\frac{k}{n}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{c}{\sqrt{n}}, s \in \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, \frac{k+1}{n} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}\right), k=0, 1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что при

$$\begin{aligned} & s \in \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, \frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}\right) \\ & \left| g_i\left(\frac{k}{n}\right) - g_i(s) \right| < K \left(\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \sup_k |\zeta_{nk}| \right). \end{aligned}$$

Поэтому, если $\alpha_n = \frac{c}{\sqrt{n}} + K \left(\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \sup_k |\zeta_{nk}| \right)$, то выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \alpha_n < w(s) < g_2(s) - \alpha_n, 0 \leq s \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn} \right\} \leq \\ & \leq Q_n \leq \mathbf{P} \left\{ g_1(s) - \alpha_n < w(s) < g_2(s) + \alpha_n, \right. \end{aligned}$$

$$0 \leq s \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn} \}.$$

Величины $\eta_i^{(n)}$ удовлетворяют условиям леммы 1, так что

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_k |\zeta_{nk}| > 2 \ln n \right\} \leq A_1 \frac{1}{n},$$

где A_1 зависит лишь от C . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \alpha_n < w(s) < g_2(s) - \alpha_n, s \in [0, 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}] \right\} > \\ & > \mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \frac{c + 2b \ln n + K \sqrt{n}^{-1}}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{c + 2b \ln n + K \sqrt{n}^{-1}}{\sqrt{n}}, s \in \left[0, 1 + \frac{b \ln n}{\sqrt{n}} \right] \right\} - \\ & - A_1 \frac{1}{n} = \mathbf{P} \left\{ g_1 \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right) + \beta_n < w \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right) < \right. \\ & \quad \left. < g_2 \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right) - \beta_n, 0 \leq u \leq 1 \right\} - A_1 \cdot \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

где $\beta_n = \frac{c + 2b \ln n + K \sqrt{n}^{-1}}{\sqrt{n}}$. Но

$$\left| g_i \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right) - g_i(u) \right| \leq K \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому при $\gamma_n = \beta_n + K \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \alpha_n < w(s) < g_2(s) - \alpha_n, 0 \leq s \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn} \right\} > \\ & > \mathbf{P} \left\{ g_1(u) + \gamma_n < w \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right) < \right. \\ & \quad \left. < g_2(u) - \gamma_n, 0 \leq u \leq 1 \right\} - A_1 \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Процесс $w_1(u) = \frac{w \left(u \left(1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}} \right) \right)}{\sqrt{1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}}$ также будет процессом броу-

новского движения, следовательно,

$$\mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \alpha_n < w(s) < g_2(s) - \alpha_n, 0 \leq s \leq 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn} \right\} >$$

$$> \mathbf{P} \left\{ \frac{g_1(u) + \gamma_n}{\sqrt{1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} < w(u) < \frac{g_2(u) - \gamma_n}{\sqrt{1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}}, 0 \leq u \leq 1 \right\} - A_1 \cdot \frac{1}{n}.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ g_1(s) - \alpha_n < w(s) < g_2(s) + \alpha_n, 0 \leq s < 1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \varepsilon_{nn} \right\} < \\ < \mathbf{P} \left\{ \frac{g_1(u) - \gamma_n}{\sqrt{1 - \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} < w(u) < \right. \\ \left. < \frac{g_2(u) + \gamma_n}{\sqrt{1 - \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}}, 0 \leq u \leq 1 \right\} + A_1 \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для γ_n , можно утверждать, что существует такая постоянная H , зависящая лишь от $g_1(0)$, $g_2(0)$, K и c , что

$$\begin{aligned} \left| g_1(u) - \frac{g_1(u) + \gamma_n}{\sqrt{1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} \right| &\leq H \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad \left| \frac{g_2(u) - \gamma_n}{\sqrt{1 + \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} - \right. \\ &\quad \left. - g_2(u) \right| \leq H \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \\ \left| g_1(u) - \frac{g_1(u) - \gamma_n}{\sqrt{1 - \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} \right| &\leq H \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad \left| \frac{g_2(u) + \gamma_n}{\sqrt{1 - \frac{2b \ln n}{\sqrt{n}}}} - \right. \\ &\quad \left. - g_2(u) \right| \leq H \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, s \in [0, 1] \right\} - \\ - A_1 \cdot \frac{1}{n} < Q_n < \mathbf{P} \left\{ g_1(s) - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) + \right. \\ \left. + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, s \in [0, 1] \right\} + A_1 \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P} \left\{ g_1(s) + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, s \in [0, 1] \right\} <$$

$$< Q < P \left\{ g_1(s) - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, s \in [0, 1] \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |Q_n - Q| &\leq \frac{2A_1}{n} + P \left\{ g_1(s) - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, 0 \leq s \leq 1 \right\} - P \left\{ g_1(s) + \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < w(s) < g_2(s) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, 0 \leq s \leq 1 \right\} \leq \frac{2A_1}{n} + P \left\{ -\frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < \sup_{0 \leq s \leq 1} (g_1(s) - w(s)) < \right. \\ &\quad \left. < \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} \right\} + P \left\{ -\frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < \sup_{0 \leq s \leq 1} (w(s) - g_2(s)) < \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Из леммы 4 вытекает, что существуют такие постоянные H_i , зависящая лишь от $|g_1(0)|$ и K , и H_2 , зависящая лишь от $|g_2(0)|$ и K , что

$$\begin{aligned} P \left\{ -\frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < \sup_s [g_1(s) - w(s)] < \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} \right\} &\leq H_1 \cdot \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}, \\ P \left\{ -\frac{H \ln n}{\sqrt{n}} < \sup_s [w(s) - g_2(s)] < \frac{H \ln n}{\sqrt{n}} \right\} &\leq H_2 \cdot \frac{H \ln n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|Q_n - Q| \leq \frac{2A_1}{n} + H(H_1 + H_2) \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Из этого неравенства и вытекает доказательство теоремы.

§ 4. О распределении некоторых аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим последовательность одинаково распределенных независимых величин $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$, для которых $M\xi_{ni} = 0$, $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$, и при некотором $c > 0$

$P\{|\xi_{ni}| > \frac{c}{\sqrt{n}}\} = 0$. Пусть $s_{nk} = \sum_{i=1}^k \xi_{ni}$. Рассмотрим достаточно

гладкую функцию $f(t, x)$, относительно которой будет предполагаться, что все встречающиеся ниже ее производные существуют и непрерывны. Обозначим через φ_n случайную величину, определяемую равенством

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}, s_{nk}\right), \quad (4.1)$$

и будем исследовать поведение распределения φ_n при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ независимые случайные величины, для которых величины $w(\tau_1), w(\tau_1 + \tau_2), \dots, w(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)$ имеют такое же совместное распределение, как и $s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nn}$. Как и в предыдущем параграфе, введем обозначения:

$$D\tau_i = \frac{b^2}{n^2}, \quad \eta_i^{(n)} = \frac{\sqrt{n}}{b} \left(\tau_i - \frac{1}{n} \right), \quad \zeta_{nk} = \sum_{i=1}^k \eta_i^{(n)}.$$

Распределение величины φ_n будет совпадать с распределением величины

$$\bar{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right). \quad (4.2)$$

Преобразуем выражение (4.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) - f\left(\frac{k}{n} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно обе суммы:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}} f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) ds - \\ &- \frac{b}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \left[\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk} \right] + \\ &+ \frac{f(0,0)}{n} - \frac{f\left(1, w\left(1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}\right)\right)}{n}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) ds = \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f(s) w(s) ds + \\
 & + \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} \left[f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) - f(s, w(s)) \right] ds = \\
 & = \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f(s, w(s)) ds - \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f'_t(\Theta_s, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)) \left[s - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k}{n} - \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right] ds - \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} \left[f(s, w(s)) - \right. \\
 & \quad \left. - f\left(s, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \right] ds
 \end{aligned}$$

(здесь Θ некоторая точка из интервала $\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, s\right)$). Если

$$|f'_t| < C_1, |f'_x| < C_2, |f''_{xx}| < C_3,$$

то

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f'_t(\Theta_s, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)) \left(s - \frac{k}{n} - \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right) ds \right| \leq \\
 & \leq C_1 \left[\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} \left[f(s, w(s)) - f\left(s, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \right] ds = \beta_{nk} + \gamma_{nk}, \\
 & \frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}
 \end{aligned}$$

где

$$\beta_{nk} = \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f'_x \left(s, w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right) \left[w(s) - w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right] ds,$$

$$\gamma_{nk} = \frac{1}{2} \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} O \left(f''_{xx} \left(s, w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right) \right) \left[w(s) - w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right]^2 ds.$$

Очевидно, что $M \beta_{ni} \beta_{nk} = 0$ при $i \neq k$,

$$M \beta_{nk}^2 \leq C_2^2 M \left[\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right] \times$$

$$\times \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} \left[w(s) - w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right]^2 ds \leq$$

$$\leq \frac{c^2}{n} C_2^2 M \left[\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right]^2 = c^2 \frac{C_2^2}{n^3} (b^2 + 1)$$

так как при $s \in \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, \frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1} \right)$, выполняется неравенство $\left| w(s) - w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$, поскольку $|\xi_{ni}| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$. Кроме того,

$$|\gamma_{nk}| \leq \frac{1}{2} C_3 \frac{c^2}{n} \left[\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right].$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}}^{\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1}} f \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right) ds =$$

$$= \int_0^{1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}} f(s, w(s)) ds + O \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right)^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \xi_{nk}) + \frac{1}{n} \right] \Big) \Big) - \sum_{k=1}^n \beta_{nk} = \\
& = \int_0^{1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}} f(s, w(s)) ds + \frac{\varepsilon_n}{n},
\end{aligned}$$

где $M\varepsilon_n^2$ ограничено постоянной, не зависящей от n .

Рассмотрим теперь вторую сумму:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) - f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \right.\right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \Big] = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'_i\left(\frac{k}{n}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} - \\
& - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f''_i\left(\Theta_k^{(n)}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \frac{b^2}{n} \zeta_{nk}^2,
\end{aligned}$$

где $\Theta_k^{(n)}$ лежит между $\frac{k}{n}$ и $\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_n &= \int_0^1 f(s, w(s)) ds + \frac{b}{\sqrt{n}} \left[\frac{\sqrt{n}}{b} \int_1^{1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}} f(s, w(s)) ds - \right. \\
& - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) [\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}] - \\
& \left. - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'_i\left(\frac{k}{n}, w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}\right)\right) \zeta_{nk} + \frac{\varepsilon'_n}{n}, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где $M\varepsilon_n^2$ ограничены постоянной, не зависящей от n . Для дальнейшего нам понадобится лемма.

Лемма. Пусть $M\xi_{ni}^3 = \frac{1}{n^{3/2}} \mu$. Обозначим через $\zeta_n(t)$ процесс, для которого $\zeta_n(t) = \zeta_{nk}$ при $t \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $\zeta_n(0) = 0$. Тогда совместные конечномерные распределения процессов $\zeta_n(t)$ и $w(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям пары про-

цессов $w_1(t)$ и $w(t)$, каждый из которых является процессом броуновского движения, причем

$$Mw_1(t)w(t) = -\frac{t\mu}{3b}.$$

Доказательство. Пусть

$$w_n(t) = w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}}\zeta_{nk}\right), \text{ если } t \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right), w_n(0) = 0.$$

Нам достаточно показать, что совместные конечномерные распределения пары процессов $\zeta_n(t)$ и $w_n(t)$ будут сходиться к совместным конечномерным распределениям процессов $w_1(t)$ и $w(t)$, указанным в формулировке леммы.

Заметим, что двухмерный процесс $(\zeta_n(t); w_n(t))$ будет процессом с независимыми приращениями; $\zeta_n(t)$ и $w_n(t)$ представляют собой суммы одинаково распределенных независимых

слагаемых $\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}$ и $w\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tau_i\right) - w\left(\sum_{i=1}^k\tau_i\right)$. Так как

$$M(\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) = 0, \quad D(\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) = \frac{1}{n},$$

$$M\left(w\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tau_i\right) - w\left(\sum_{i=1}^k\tau_i\right)\right) = 0, \quad D\left(w\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tau_i\right) - w\left(\sum_{i=1}^k\tau_i\right)\right) = \frac{1}{n},$$

$$M(\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk})^4 = 0\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad M\left(w\left(\sum_{i=1}^{k+1}\tau_i\right) - w\left(\sum_{i=1}^k\tau_i\right)\right)^4 = 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

выполняются условия применимости центральной предельной теоремы; так что совместные конечномерные распределения $\zeta_n(t)$ и $w_n(t)$ будут сходиться к совместным конечномерным распределениям пары процессов $w_1(t)$ и $w(t)$, каждый из которых является процессом броуновского движения. Для подсчета $Mw_1(t)w(t)$ используем соотношение

$$\begin{aligned} Mw_1(t)w(t) &= t Mw_1(1)w(1) = \\ &= t \lim_{n \rightarrow \infty} \cdot M \sum_{k=0}^{n-1} \left[w\left(\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}}\zeta_{nk+1}\right) - \right. \\ &\quad \left. - w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}}\zeta_{nk}\right) \right] (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}). \end{aligned}$$

Но

$$M\left(w\left(\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}}\zeta_{nk+1}\right) - w\left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}}\zeta_{nk}\right)\right)(\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{n}}{b} M \left[\mathcal{W} \left(\frac{k+1}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk+1} \right) - \mathcal{W} \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \xi_{nk} \right) \right] \left(\frac{1}{n} + \right. \\
&+ \left. \frac{b}{\sqrt{n}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}) \right) = \frac{\sqrt{n}}{b} M \left[\mathcal{W} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \tau_i \right) - \mathcal{W} \left(\sum_{i=1}^k \tau_i \right) \right] \tau_{k+1} = \\
&= \frac{\sqrt{n}}{b} M \cdot M(\mathcal{W}(\tau_1) \tau_1 / \xi_{n1})
\end{aligned}$$

(как вытекает из построения τ_1 , проведенного в § 2, величины τ_1 и $\mathcal{W}(\tau_1)$ зависят от ξ_{n1}). Из следствия 4 леммы 1 § 2 вытекает, что

$$M(\mathcal{W}(\tau_1) \tau_1 / \xi_{n1}) = -\frac{1}{3} M(\mathcal{W}(\tau_1)^2 / \xi_{n1}).$$

Поэтому $M w_1(t) w(t) = -\frac{t\mu}{3b}$. Лемма доказана.

Следствие. Какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $g(x)$

$$\begin{aligned}
&Mg \left(\int_0^1 f(s, w(s)) ds \right) \left[\frac{\sqrt{n}}{b} \int_1^{1 + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nn}} f(s, w(s)) ds - \right. \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk}, w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right) [\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}] - \\
&- \left. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'_t \left(\frac{k}{n}, w \left(\frac{k}{n} + \frac{b}{\sqrt{n}} \zeta_{nk} \right) \right) \zeta_{nk} \right] \rightarrow \\
&\rightarrow Mg \left(\int_0^1 f(s, w(s)) ds \right) \left[f(1, w(1)) w_1(1) - \right. \\
&- \left. \int_0^1 f(s, w(s)) dw_1(s) - \int_0^1 f'_t(s, w(s)) w_1(s) ds \right], \quad (4.4)
\end{aligned}$$

где $(w(s); w_1(s))$ образуют двухмерный гауссовский процесс с независимыми приращениями такой, что $w(s)$ и $w_1(s)$ процессы броуновского движения и

$$M w(s) w_1(s) = -\frac{\mu t}{3b}.$$

Для доказательства этого утверждения построим процессы

$w_n(s)$ и $\tilde{\zeta}_n(s)$, имеющие такие же совместные распределения как и $w(s)$ и $\zeta_n(s)$ и сходящиеся к процессам $\tilde{w}(s)$ и $w_1(s)$, совместное распределение которых совпадает с совместным распределением процессов $w(s)$ и $w_1(s)$ (это можно сделать на основании теоремы § 6 гл. 1). Подставляя $\tilde{w}_n(s)$ и $\tilde{\zeta}_n(s)$ в (4.4) вместо $w(s)$ и $\zeta_n(s)$, получим, произведя предельный переход под знаком математического ожидания и используя теорему § 3 гл. 2 о переходе к пределу под знаком стохастического интеграла, доказательство сформулированного утверждения. Полученные выше результаты позволяют установить следующую теорему об асимптотическом поведении распределения величины Φ_n .

Теорема. Пусть $g(x)$ ограниченная вместе со своими двумя производными функция. Тогда

$$\begin{aligned} M g(\Phi_n) = & M g\left(\int_0^1 f(s, w(s)) ds\right) + \\ & + \frac{\mu}{\sqrt{n}} M g'\left(\int_0^1 f(s, w(s)) ds\right) \left[f(1, w(1)) w_1(1) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 f(s, w(s)) dw_1(s) - \int_0^1 f'_t(s, w(s)) w_1(s) ds \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы получается сразу, если использовать представление (4.3) для Φ_n , формулу Тейлора для $g(x)$ в точке $\int_0^1 f(s, w(s)) ds$ с остаточным членом второго порядка и формулу (4.4), а также то обстоятельство, что процесс $w_1(t) = -\frac{\mu}{3b} w(t)$ не зависит от $w(t)$.

ПРИМЕЧАНИЯ

Глава 1.

§ 1. Относительно определений случайного процесса смотри книги А. Н. Колмогорова [1] и Дж. Л. Дуба [4]. Теорема 1 является комбинацией теорем 2.4 и 2.6 гл. 2 книги Дуба [4]. Теорема 2 впервые опубликована в работе Е. Слуцкого [1], доказательство ее имеется у Р. Л. Добрушина и А. М. Яглома [1]. Доказательство теоремы 3 содержится в книге А. Н. Колмогорова [1], стр. 39.

§ 2. Теория условных вероятностей и математических ожиданий развита А. Н. Колмогоровым в [1]. Детальное изложение свойств условных математических ожиданий и вероятностей имеется в книге Дуба [4], гл. 1, §§ 7—10.

§ 3. Общий вид процессов с независимыми приращениями получен А. Н. Колмогоровым в [5] (случай конечной дисперсии) и П. Леви в [1]. Наиболее полно теория этих процессов изложена в книгах П. Леви [3] и Дуба [4].

§ 4. Основы общей теории процессов Маркова заложены в работе А. Н. Колмогорова [2]. Подробное изложение теории процессов Маркова содержится в книгах Дуба [4] и Е. Б. Дынкина [6].

§ 5. Теория мартингалов содержится в книге Дуба [4], гл. 7.

§ 6. Теорема этого параграфа является незначительным видоизменением теоремы 3.1.2 работы А. В. Скорохода [3].

Глава 2.

§ 1. Стохастические интегралы по процессу броуновского движения введены Н. Винером [1] для того случая, когда интегрируемая функция не зависит от случая. Рассматриваемые нами определения принадлежат К. Ито [1—5].

§ 2. Теоремы 1—3 содержатся в указанных работах Ито. Теорема 4, по-видимому, приводится здесь впервые.

§ 3. Определение стохастического интеграла по мартингалу содержится в книге Дуба [4], гл. 9, § 5. Теорема этого параграфа приводится здесь, по-видимому, впервые.

§ 4. Стохастические интегралы по пуассоновским мерам

определены в работе Ито [5]. Случайные меры и интегралы по этим мерам для того случая, когда интегрируемая функция не зависит от случая, изучались Бохнером [1] и А. Прекопа [1].

Глава 3.

Стохастические дифференциальные уравнения впервые рассматривались С. Н. Бернштейном [1] (см. также [2], дополнение 4), который в своих работах не строил траекторий процессов, удовлетворяющих уравнениям, а изучал лишь одномерные распределения процесса. Само уравнение рассматривалось как конструкция для получения этих распределений и записывалось в конечноразностной форме; кроме того, изучался вопрос о существовании предельного распределения для одномерных распределений решения конечноразностного уравнения, когда длины отрезков разбиения стремятся к нулю. Изучался также вопрос, при каких условиях это предельное распределение будет удовлетворять уравнению Фоккера — Планка. Эти работы С. Н. Бернштейна тесно связаны с его работами по распространению центральной предельной теоремы на зависимые случайные величины.

С другой стороны, физики подходили к подобным вопросам, исследуя системы с быстро переменными силами и пытаясь определить усреднённые характеристики поведения системы, не решая уравнений, управляющих системой. Здесь имеется целый цикл работ, посвящённых броуновскому движению и выводу уравнений Фоккера — Планка. Интересна в этом отношении работа Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова [1], в которой исследуется вопрос о предельном поведении динамической системы, находящейся под воздействием случайной силы, которая в пределе превращается в «белый шум». Крылов и Боголюбов установили, что движение системы в пределе описывается марковским процессом, переходные вероятности которого будут удовлетворять уравнению Фоккера — Планка. Правда, предельный переход в уравнениях динамики строго обоснован не был. Для обоснования этого предельного перехода И. И. Гихману (продолжавшему эти исследования) пришлось создать теорию стохастических дифференциальных уравнений (см. [1—4]).

Стохастические уравнения Гихмана позволили не только найти распределение процесса в одной точке, но и строить траектории процесса. И. И. Гихман доказал дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным, что позволило ему вывести обратные уравнения А. Н. Колмогорова для математических ожиданий от гладких функций от процесса.

Дальнейшее существенное продвижение в теории стохастических дифференциальных уравнений связано с именем К. Ито. Он создал общую теорию стохастических интегралов, которая позволила ему построить стохастические уравнения и для разрывных процессов (в отличие от предыдущих авторов, рас-

смаатривавших в основном непрерывные процессы; правда здесь он ограничился одномерным случаем) и для непрерывных процессов в дифференцируемых многообразиях. Работы Ито по стохастическим дифференциальным уравнениям [2—5] представляют большой интерес еще потому, что ему удалось построить довольно широкий класс марковских случайных процессов, используя лишь процесс броуновского движения и пуассоновскую меру с независимыми значениями.

Отметим ещё, что идея стохастического уравнения в смысле С. Н. Бернштейна уточнялась П. Леви в [3], который также высказал мысль о возможности построения траекторий решения уравнения. Некоторые обобщения уравнения С. Н. Бернштейна рассматривал Ф. Зитек [1, 2]. Уравнения Ито изучались также Дубом [3] и Г. Маруяма [1].

§ 2. Теорема 1 обобщает теорему Ито из [5] на многомерный случай, идея доказательства принадлежит Ито.

§ 3. Теорема единственности является обобщением соответствующей теоремы Ито из [5] на многомерный случай. Теорема существования и идея её доказательства являются по-видимому новыми результатами. Эта же идея была использована в моей работе [9] для доказательства существования решения в случае уравнений для одномерных диффузионных процессов.

§ 4. Определение дифференциала Ито содержится в его работе [5].

§ 5. Теоремы о дифференцируемости решений стохастических дифференциальных уравнений по параметру для случая диффузионных процессов получены И. И. Гихманом [3, 4].

§ 6. Идея вывода интегро-дифференциальных уравнений для математических ожиданий гладких функций от процесса принадлежит И. И. Гихману и осуществлена им для диффузионного случая. Полученное интегро-дифференциальное уравнение является обобщением уравнений для распределений марковского процесса, полученных А. Н. Колмогоровым [2] и В. Феллером [2]. Метод дифференциальных уравнений, предложенный И. Г. Петровским [1], широко применялся в работах А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, И. И. Гихмана. Полученное уравнение тесно связано с результатами полугрупповой теории марковских процессов, разрабатываемой В. Феллером [3—4] и Е. Б. Дынкиным [3, 4]. Связь между марковскими процессами и уравнениями в частных производных изучалась в работах М. Каца [1, 2], Дынкина [2], Р. З. Хасьминского [1—3], изложение связанных с этими результатами вопросов имеется в обзоре И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [1].

Глава 4.

§ 1. Об абсолютной непрерывности мер и о теореме Родона—Никодима смотри книгу Халмоша [1], гл. 6.

§ 3. Результаты этого параграфа содержатся в моей статье [6].

§ 4. Результаты этого параграфа в случае одномерных диффузионных процессов с коэффициентом диффузии, равным 1, получались при разных предположениях Камероном и Мартином [1, 2], Камероном и Фагеном [1], Ю. В. Прохоровым [3] (дополнение 2), смотри также обзор И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [1]. Общий случай рассмотрен мною в [7].

Глава 5.

Эта глава является незначительной переработкой моей статьи [9].

Глава 6.

Предельные теоремы для распределений марковских последовательностей в одной точке рассматривали С. Н. Бернштейн [1, 2], А. Я. Хинчин [1] (в обоих случаях рассматривалась сходимость к диффузионному процессу). Сходимость для функционалов, зависящих от всего течения траектории процесса, рассматривалась А. Н. Колмогоровым [3, 4] и А. Я. Хинчиным [1], которые рассматривали предельные теоремы для вероятностей того, что последовательность сумм независимых случайных величин или последовательность значений цепи Маркова будут лежать между двумя заданными кривыми. Эрдос и Кац [1, 2] рассматривали предельные теоремы для некоторых других конкретных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин. Общая предельная теорема для распределений широкого класса функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин принадлежит М. Донскеру [1]. Случай сходимости к разрывным процессам с независимыми приращениями и диффузионным процессам изучался И. И. Гихманом [5, 6]. Ю. В. Прохоров [1, 2] обобщил результаты Донскера на случай сходимости к произвольным непрерывным процессам. Изложению перечисленных выше вопросов посвящена обзорная статья А. Н. Колмогорова и Ю. В. Прохорова [1].

В моих работах [1—3] была введена топология в пространстве функций без разрывов второго рода и были установлены предельные теоремы для функционалов от последовательности процессов, если функционалы непрерывны в этой топологии. Эта топология изучалась затем А. Н. Колмогоровым [6] и Ю. В. Прохоровым [3], которые доказали, что она порождается некоторой метрикой и эта метрика была построена. Ю. В. Прохоров [3] изучал сходимость распределений функционалов непрерывных в этой метрике от последовательности сумм разнораспределенных независимых слагаемых (случай одинаково распределённых слагаемых был рассмотрен мною [1]). В моих работах [4, 5] общие теоремы [3] применялись для получения предельных теорем для процессов с независимыми приращениями и однородных процессов Маркова. Сходимость к диффузионным процессам

рассматривалась также в работе Г. Маруяма [1]. Интересную предельную теорему для вероятности нахождения процесса между двумя кривыми в случае сходимости к произвольному процессу без разрывов второго рода получил Н. Н. Ченцов [1].

Результаты §§ 2, 3 опубликованы в моей статье [3]. Результаты §§ 4, 5 публикуются, в основном, впервые. Следует отметить, что оценки, аналогичные тем, которые получены в леммах 2 и 3 § 5, получались ранее Е. Б. Дынкиным [1] и Р. Кини [1].

Глава 7.

Уточнениям предельных теорем для распределений сумм независимых случайных величин посвящены работы Г. Крамера [1] и С. Эссеена [1] (см. также книгу Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]). Оценки скорости сходимости для распределений некоторых конкретных функционалов имеются в работах К. Л. Чжуна [1, 2]. Общие методы получения асимптотических разложений для вероятности того, что последовательность значений цепи Маркова будет лежать между двумя прямыми, разрабатываются В. С. Королюком [1—3]. Результаты §§ 2, 3 опубликованы мною в [8, 11]. Задача, рассмотренная в § 3, решалась также Ю. В. Прохоровым [3] без предположения об ограниченности слагаемых; им также была получена оценка: $|Q_n - Q| =$

$$= o\left(\frac{\log^2 n}{n^{1/4}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

М. С. Бартлетт

1 Введение в теорию случайных процессов, ИИЛ, М. 1958

С. Н. Бернштейн.

1. Principes de la theorie des equations differentielles stochastiques. Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 5, 95—124, 1934

2 Теория вероятностей, изд. 4, М.—Л., 1946

Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов.

1. Про рівняння Фоккера—Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, оснорманим на властивостях пертурбаційного гамільтоніана, Записки кафедри маг. фіз. АН УРСР, 4, К., стр. 5—158. 1939

С. Бохнер (S. Bochner).

1. Stochastic processes. Ann. of Math. 48, 1014—1061, 1947.

А. Д. Вентцель.

1 Полугруппы операторов, соответствующих обобщенному дифференциальному оператору второго порядка, ДАН, 111, 269—272, 1956

2. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов, Теор. вер. и ее прим., 4, 172—185, 1959.

Н. Винер (N. Wiener).

1 Differential space Journ. of math. and phys. Massachusett's Inst. of Technology, 2, 131—179, 1923 г.

2 Generalized harmonic analysis Acta math 55, 117—258, 1930

3. The homogeneous chaos. Amer. Journ. of math 60, 897—936. 1938

И. М. Гельфанд, А. М. Яглом.

1 Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике, УМН, 11:1, 77—114, 1956.

И. В. Гирсанов.

1. Сильно феллеровские процессы. 1, Теор. вер. и ее прим., 5, 1960.

2. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры, Теория вер. и ее прим., 5, 314—330. 1960

И. И. Гихман.

1 Об одной схеме образования случайных процессов, ДАН, 58, 961—964, 1947

2. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями УМЖ, 2:3, 45—69, 1950.

3. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. УМЖ. 2:4, 37—63, 1950.

4. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов II. УМЖ, 3, 317—339, 1951.

5. О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачами математической статистики, УМЖ, 5, 413—433, 1953.

6 Об одной теореме А. Н. Колмогорова, Науч. зап. ун-та, 12:6, мат. сб., 7, К., 75—94, 1953.

7. Процессы Маркова в задачах математической статистики, УМЖ, 6, 28—36, 1954.
- Б. В. Гнеденко.
 1. Курс теории вероятностей, изд. 2, М.—Л., 1954.
 - Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров.
 1. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л., 1949.
 - К. Л. Джун (K. L. Chung).
 1. On the maximum of partial sums of independent random variables. Trans. AMS, 64, 205—233, 1948.
 2. An estimate, concerning the Kolmogorov limit distribution. Trans. AMS, 67, 36—50, 1949.
 - М. Д. Донскер (M. D. Donsker).
 1. An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. AMS, 6, 1—12, 1951.
 2. Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogoroff—Smirnov theorems. Ann. Math. Stat., 23, 277—281, 1952.
 - Р. Л. Добрушин, А. М. Яглом.
 1. Приложение переводчиков в книге Дж. Дуба «Вероятностные процессы», ИЛ, 1956.
 - Дж. Л. Дуб (J. L. Doob)
 1. The Brownian movement and stochastic equations. Ann. Math. 43, 361—369, 1942.
 2. The elementary Gaussian processes. Ann. Math. Stat., 15, 229—282, 1944.
 3. Martingales and one dimensional diffusion. Trans. AMS, 78, 168—208, 1955.
 4. Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
 - Е. Б. Дынкин.
 1. Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН, сер. матем., 16, 563—572, 1952.
 2. Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН, 104, 691—694, 1955.
 3. Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теор. вер. и ее прим., 1, 38—60, 1956.
 4. Одномерные непрерывные строго марковские процессы. «Теор. вер. и ее прим.», 4, 3—54, 1959.
 5. Неоднородные строго марковские процессы, ДАН, 113, 261—263, 1957.
 6. Основания теории марковских процессов, Физматгиз, 1959.
 - Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич.
 1. Строго марковские процессы, Теор. вер. и ее прим., 1, 149—155, 1956.
 - Ф. Зитек (F. Zitek).
 1. Equation differentiales stochastiques. Чехослов. мат. журн., 8 (83), 465—472, 1958.
 2. Sur l'intégrabilité d'une equation differentielle stochastique. Чехослов. мат. журн., 8 (83), 473—482, 1958.
 3. Fonctions aleatoires d'intervalle, Чехослов. мат. журн., 8 (83), 583—609, 1958.
 - К. Ито (K. Ito).
 1. Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20, 519—524, 1944.
 2. On stochastic integral equations, Proc. Jap. Acad. № 1—4, 32—35, 1946.
 3. On stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoya Math. Journ., 1, 35—47, 1950.
 4. On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. Journ. 3, 55—65, 1951.
 5. On stochastic differential equations. Mem. AMS, 4, 1—51, 1951.
 - Р. Г. Камерон, В. Т. Мартин (R. H. Cameron, W. T. Martin).

1. Transformation of Wiener integrals under translations Ann. Math, 45, 386—396, 1944.

2. Transformation of Wiener integrals by nonlinear transformation. Trans. AMS, 66, 253—283, 1949.

Р. Г. Камерон, Р. Е. Феген (R. H. Cameron, R. E. Fagen).

1. Nonlinear transformation of Volterra type in Wiener space. Trans AMS, 75, 552—575, 1953.

М. Кац (M. Kac).

1. On distribution of certain Wiener functionals Trans. AMS, 65, 1—13, 1949.

2. On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. 2-nd Berkley Sympos. Math. Stat. and Probab. Berkeley, 189—215, 1951.

Дж. Р. Кинни (J. R. Kinney).

1. Continuity properties of sample functions of Markoff processes. Trans. AMS, 74, 280—302, 1953.

А. Н. Колмогоров

1. Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936.

2. Аналитические методы в теории вероятностей, УМН, 5, 5—41, 1938.

3. Eine Verallgemeinerung des Laplace — Liapounoffschen Satzes. изд-во АН, ОМОН, 959—962, 1931.

4. Ueber die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitrechnung, изд-во АН, ОМОН, 363—372, 1933.

5. Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. Rend. d. R. Acad. Naz. dei Lincei, 15(6), 805—808, 866, 1932.

6. О сходимости А. В. Скорохода, Теор. вер. и ее прим., 1, 239—247, 1956.

А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров.

1. Zufällige funktionen und Grenzverteilungssätze; Bericht über die Tagungswahrscheinlichkeitrechnung und mathematische Statistik. Berlin, 113—126, 1954.

В. С. Королюк

1. Асимптотические разложения для распределения максимальных отклонений в схеме Бернулли, ДАН, 108, 183—186, 1956.

2. Асимптотичний аналіз імовірності вбирання в одномірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу, ДАН УРСР, 7, 1959.

3. Асимптотический анализ распределений максимальных отклонений в схеме Бернулли, Теор. вер. и ее прим., 4, 369—397, 1959.

Г. Крамер.

1. Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.

П. Леви (P. Lévy).

1. Sur les integrales dont les elements sont des variables aléatoires indépendantes. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2), 3, 337—366, 1934; Observation sur un précédent mémoire de l'auteur, там же, 4, 217—218, 1935.

2. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937.

3. Processus stochastiques et mouvement Brownien. Paris, 1948.

Г. Маруяма (G. Maruyama).

1. Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. Math. Palermo, 4, 1—43, 1955.

2. On the strong Markov property. Memoires of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, vol XIII, № 1, 17—29, 1959.

И. Г. Петровский.

1. Ueber das Irrfahrt Problem, Math. Ann. 109, 425, 1934.

А. Прекопа (A. Прекопа).

1. On stochastic set function, I, II, III. Acta math, Acad. sci. Hung. т 7, 215—263, 1956; т. 8, 337—374, 375—400, 1957.

Ю. В. Прохоров.

1. Распределение вероятностей в функциональных пространствах, УМН. 8:3, 165—167, 1953.

2. Методы функционального анализа в предельных теоремах теории вероятностей. Вестник Ленингр. ун-та, II, 44, Л., 1954.

3. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, «Теор. вер и ее прим.», 1, 177—238, 1956

А. В. Скороход.

1. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями, ДАН, 104, 364—367, 1955.

2. Об одном классе предельных теорем для цепей Маркова, ДАН, 106, 781—784, 1956.

3. Предельные теоремы для случайных процессов, Теор. вер. и ее прим., 1, 289—319, 1956.

4. Предельные теоремы для процессов с независимыми приращениями, Теор. вер. и ее прим., т. 2, 145—177, 1957.

5. Предельные теоремы для процессов Маркова, Теор. вер. и ее прим., 3, 217—264, 1958.

6 О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам
1. Процессы с независимыми приращениями, Теор. вер. и ее прим., 2, 418—444, 1957.

7. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. II. Процессы Маркова. Теор. вер. и ее прим., 5, 45—53, 1960.

8. Одна предельная теорема для сумм независимых случайных величин, ДАН. 133, 34—35, 1960

9. О существовании и единственности решений стохастических диффузионных уравнений Сиб. мат. журн., т. 2, № 1, 129—137, 1961.

10. О стохастических уравнениях для диффузионных процессов с отражением на границе Теор. вер и ее прим., 6, 287—293, 1961.

Е. Е. Слуцкий.

1. Alcuni proposizioni sulla theoria degli funzioni aleatorie, Giorn. Inst. Ital. Attuarie, 8, 183—199. 1937.

В. Феллер (W. Feller).

1. Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz und Eindeigkeitsätze), Math. Ann., 113, 113—160, 1936.

2. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes Trans. AMS, 48, 488—515, 1940.

3. Diffusion processes in one demension. Trans. AMS, 77, 1—31, 1954.

4. The general diffusion operator and positivity preserving semigroups in one demension. Ann. Math. 60, 417—435, 1954.

М. И. Фрейдлин.

1. О некоторых применениях стохастических уравнений Ито к дифференциальным уравнениям, Теор. вер. и ее прим., 4, 472—473, 1959.

П. Халаш.

1. Теория меры, ИЛ, М., 1953.

Р. З. Хасьминский.

1. Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа, ДАН, 104, 22—25, 1955.

2. Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области, Теор. вер. и ее прим., 3, 430—451, 1958.

3 О положительных решениях уравнения $Au + Vu = 0$, Теор. вер. и ее прим., 4, 332—341, 1959.

А. Я. Хинчин.

1. Асимптотические законы теории вероятностей. М.—Л., 1936.

2. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938.

Н. Н. Ченцов.

1. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разры-

вов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова—Смирнова, Теор. вер. и ее прим., 1, 155—161, 1956.

П. Эрдош, М. Кац (P. Erdos, M. Kac).

1. On certain limit theorems on the theory of probability, Bull. AMS, 53, 292—302, 1946.

2. On the number of positive sums of independent random variable, Bull. AMS, 53, 1011, 1947.

С. Эсseen (S. Esseen).

1. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law Acta Math., 77, 1—125, 1947.

А. А. Юшкевич.

1. О строго марковских процессах, Теор. вер. и ее прим., 2, 187—213, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	3
-----------------------	---

Г л а в а 1. Некоторые сведения из теории случайных процессов

§ 1. Основные определения, связанные с понятием случайного процесса	5
§ 2. Условные вероятности и математические ожидания	8
§ 3. Процессы с независимыми приращениями	9
§ 4. Марковские процессы	11
§ 5. Мартингалы	12
§ 6. Одна предельная теорема для случайных процессов	13

Г л а в а 2. Стохастические интегралы

§ 1. Определение стохастического интеграла по процессу броуновского движения	19
§ 2. Стохастический интеграл по процессу броуновского движения как функция верхнего предела	25
§ 3. Стохастический интеграл по мартингалу	37
§ 4. Стохастические интегралы по некоторым случайным мерам	42

Г л а в а 3. Марковские процессы и стохастические уравнения

§ 1. Вид стохастических уравнений для марковских процессов	52
§ 2. Существование и единственность решения стохастических уравнений	56
§ 3. Существование и единственность решения стохастических уравнений (продолжение)	68
§ 4. Решения стохастических уравнений как процессы Маркова	85
§ 5. Зависимость решений стохастических уравнений от начальных данных	95
§ 6. Дифференциальные уравнения для определения распределений марковских процессов	105

Г л а в а 4. О дифференцируемости мер, соответствующих процессам Маркова

§ 1. Постановка задачи	109
§ 2. Леммы	110

§ 3. Некоторые достаточные условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих однородным процессам с независимыми приращениями	115
§ 4. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих процессам Маркова	126

Глава 5 Одномерные диффузионные процессы

§ 1. Предварительные замечания	135
§ 2. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих диффузионным процессам	138
§ 3. Теорема сравнения для диффузионных процессов	140
§ 4. Теорема о единственности решения стохастического уравнения для диффузионных процессов	145

Глава 6. Предельный переход от цепи Маркова к марковскому процессу с непрерывным временем

§ 1. Постановка задачи	147
§ 2. Об одном виде сходимости функций без разрывов второго рода	149
§ 3. Предельная теорема для J-непрерывных функционалов	154
§ 4. Условия сходимости конечномерных распределений	156
§ 5. Предельная теорема для распределений функционалов от последовательности процессов Маркова	174

Глава 7. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин

§ 1. Предварительные замечания	179
§ 2. Представление последовательности сумм независимых случайных величин значениями процесса броуновского движения	180
§ 3. О вероятности нахождения последовательных сумм между двумя границами	187
§ 4. О распределении некоторых аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин	197
Примечания	205
Литература	210

